Anfangswerte für einen späteren Schwarzes-Loch-Kollaps von kugelsymmetrischen relativistischen Flüssigkeiten

Existenzsätze und Numerik

Vom Fachbereich Maschinenbau
der Universität der Bundeswehr Hamburg
zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktor-Ingenieurs
genehmigte

Dissertation

von

Ulrich Alfes
aus Bremen

Hamburg 2002

Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. Hans-Jürgen Seifert
Prof. Dr. rer. nat. Henning Müller zum Hagen

Tag der mündlichen Prüfung: 03. 06. 2002

Zusammenfassung

Anfangsrandwertaufgaben für quasilineare, partielle Differentialgleichungssysteme erster Ordnung $\partial_t \mathfrak{u} + \mathbf{A}(\mathfrak{u}) \cdot \partial_x \mathfrak{u} = \mathfrak{b}(\mathfrak{u})$ in zwei Unbekannten vom hyperbolischen Typ werden betrachtet. Ein in astrophysikalischer Hinsicht interessantes und zugleich herausforderndes[1] Beispiel dafür ist eine kugelsymmetrische Raumzeit aus idealer Flüssigkeit, deren späteres Kollabieren durch geeignete Vorgabe von Anfangswerten erreicht werden kann. Dabei wird aus einem zeitlich lokalen Existenzsatz die zeitlich globale Aussage „Entstehen eines Ereignishorizontes aus harmlosen Anfangsdaten“ gewonnen. Die dazu von den Anfangswerten zu verlangenden physikalischen Bedingungen verhindern das Sicherstellen einer glatten Lösung am Sternrand[2]. Die Beweise werden dennoch übersichtlich, weil das System auf diagonale Gestalt gebracht wird.

Das Diagonalisierungsverfahren[3] wird einerseits auf die o.g. Einstein-Gleichungen angewandt und andererseits auf die Gleichungen der eindimensionalen Gasdynamik (in Lagrangeschen und nach Transformation auch in Eulerschen Koordinaten).

Numerisch wird ein neues Hybrid-Verfahren getestet an einer einzelnen Gleichung mit knickenden Anfangsdaten.

---

[1] Neben der Nichtlinearität des nicht in Divergenz-Form vorliegenden Gleichungssystems sind die Koordinaten mit der zugrunde liegenden Geometrie verkoppelt, wobei die Komponenten der Metrik zu den Unbekannten des partiellen Differentialgleichungssystems gehören

[2] wo bei positiver Massenenergiedichte ein Vakuum angeschlossen wird (Flüssigkeitsoberfläche)

[3] An dem Verfahren ist neu, daß es auch dann funktioniert, wenn $\mathbf{A}$ nicht invertierbar ist, weil einige Eigenwerte identisch verschwinden, sofern das System so geschrieben ist, daß zu den trivial propagierten abhängigen Unbekannten sogenannte Zwangsbedingungen existieren

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

1.1 Einleitung

1.1.1 Betrachtete partielle Differentialgleichungen

In dieser Arbeit geht es um Anfangsrandwertaufgaben für gewisse quasilineare Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung

$$\partial_t \mathfrak{u} + \mathbf{A}\left(\mathfrak{u}\right) \cdot \partial_x \mathfrak{u} = \mathfrak{b}\left(\mathfrak{u}\right) \tag{1.1}$$

mit zwei unabhängigen Variablen (t, x). Dabei mögen einige Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}\left(\mathfrak{u}\right)$ identisch verschwinden, während die übrigen paarweise verschieden seien für alle zulässigen $\mathfrak{u}$-Werte. Insofern ist das System hyperbolisch, aber nicht streng hyperbolisch.

Solche Systeme tauchen in Physik und Ingenieurwissenschaften vielerorts auf. Gleichungen und Systeme höherer Ordnung lassen sich häufig auf diese Form bringen. Beispielsweise läßt sich die nichtlineare Gleichung für einen oszillierenden Stab

$$\partial_{tt} u - \partial_x \left(K(\partial_x u)\right) = 0 \tag{1.2}$$

durch Einführen neuer Unbekannter $v = \partial_x u$ und $w = \partial_t u$ in eine solche Gestalt bringen. Mit Hilfe von Riemann-Invarianten läßt sich dieses System auch noch diagonalisieren. Dabei heißt das System (1.1) diagonal, wenn $\mathbf{A}\left(\mathfrak{u}\right)$ eine Diagonalmatrix ist.

Das Hauptproblem bei hyperbolischen Systemen ist, daß sich auch aus regulären Anfangsdaten nach beliebig kurzer Zeit Schocks entwickeln können, so daß eine eindeutige klassische Lösung nicht mehr existiert. Anschaulich zeigt dies etwa die Oberflächenwelle eines Ozeans, indem sie sich überschlägt. Abgesehen von der zu vernachlässigenden Gischt, ist die Höhe des Wasserspiegels in der Nähe des Wellenkammes dann nicht mehr eine stetig differenzierbares Funktion, so daß man zu einem verallgemeinerten Lösungsbegriff gelangt. Derartige Ansätze sind wie auch die Spektral- und Operatortheorie hier nicht verfolgt worden, zumal diese Ansätze für nichtlineare Gleichungen allenfalls dann anwendbar sind, wenn sie in Divergenzform vorliegen. Hier wird im Gegenteil versucht, die Systeme so zu vereinfachen, daß einerseits ein spezielles numerisches Verfahren entwickelt und getestet werden konnte und andererseits auch formale Beweise konkret nachvollzogen werden können, ohne daß harte Funktionalanalysis benötigt wird.

Für das Gleichungssystem (1.1) soll eine Anfangsrandwertaufgabe gelöst werden. Anfangsrandwertaufgabe bedeutet, daß einerseits Daten $\mathfrak{u}_0$ auf $[t = 0]$ (Anfangswerte) und andererseits Daten $\mathfrak{u}_{\text{Rand}}$ auf mindestens einem Rand $[x = x_{\text{Rand}}]$ (Randwerte) vorgegeben werden. Man möchte dann die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung $\mathfrak{u}$ des Systems (1.1) zeigen, welche diese Anfangs- und die Randwerte annimmt, also $\mathfrak{u}_{|[t=0]} = \mathfrak{u}_0$ und $\mathfrak{u}_{|[x=x_{\text{Rand}}]} = \mathfrak{u}_{\text{Rand}}$ erfüllt. Bei den in dieser Arbeit behandelten Problemen führen die folgenden Aspekte zu gewissen mathematisch-technischen, hier gelösten Schwierigkeiten.

- Das System ist nichtlinear, d.h. die durch die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}(\mathfrak{u})$ bestimmten Richtungen, in welche sich Informationen ausbreiten, hängen selbst von der gesuchten Lösung $\mathfrak{u}$ ab.

- Die Matrix $\mathbf{A}(\mathfrak{u})$ ist singulär, weil einige ihrer Eigenwerte identisch verschwinden. Insbesondere ist sie also nicht invertierbar. In den betrachteten Anwendungen wird allerdings für jeden identisch verschwindenden Eigenwert eine sogenannte Zwangsbedingung (siehe Seite 4) auftreten.

- Das Gleichungssystem liegt nicht in der Divergenz-Form $\partial_t \mathfrak{u} + \partial_x (\mathbf{f}(\mathfrak{u})) = \mathfrak{b}(\mathfrak{u})$ vor, so daß etliche Ansätze aus der Theorie quasilinearer Differentialgleichungen, wie sie insbesondere für Probleme der klassischen Hydrodynamik entwickelt wurden, hier nicht anwendbar sind. Schwache Lösungen (Distributionen) führen wegen der Nichtlinearität auch nicht weiter.

- Wo Anfangs- und Randwertvorgaben aufeinander treffen (Ecke), kann es zu Schwierigkeiten kommen, weil dort die Raumableitungen der Anfangswertvorgabe und die Zeitableitung der Randwertvorgaben in einer Beziehung zueinander stehen müssen, die mit dem Differentialgleichungssystem (1.1) verträglich ist. Für eine C^1–Lösung sind also in der Ecke von den Vorgabedaten $\mathfrak{u}_{\text{Rand}} = \mathfrak{u}_0$ und zugleich $\partial_t \mathfrak{u}_{\text{Rand}} + \mathbf{A}(\mathfrak{u}_0) \cdot \partial_x \mathfrak{u}_0 = \mathfrak{b}(\mathfrak{u}_0)$ zu fordern (Eckbedingungen 0. und 1. Ordnung).

Mit den in dieser Arbeit duchgeführten Beweisen folgen lokale Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung sogar für nur stückweise Lipschitz-stetige Anfangsdaten des diagonalen Systems. Dies ermöglicht eine Verfolgung von Knicken der ursprünglichen Gleichung (1.1). Eine stückweise C^1–Funktion hat einen **Knick**, wo die links- und rechtsseitigen Ableitungen verschieden sind. Knicke können entstehen durch Rand- und Anfangsdaten, welche die Eckbedingung 1. Ordnung verletzen. Physikalisch kann dies durch technische Beschränkungen am Rand (etwa eingespanntes Werkstück) und entsprechende Anfangswertvorgaben begründet sein.

Ähnliche Erkenntnisse erlangt man für eindimensionale viskoelastische Modelle mit Relaxation, wie sie etwa in Gasdynamik, Elastizitätstheorie oder beim Modellieren von Mehrphasenfluß auftreten. Ein vereinfachtes mathematisches Modell für derartige Phänomene schlagen Greenberg und Hsiao in [GrHs83] vor, nämlich

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x \sigma &= 0, \\ \partial_t (\sigma - f(u)) + \tfrac{\sigma - \mu f(u)}{\delta} &= 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

mit den unabhängigen Unbekannten u und σ sowie den Konstanten $\mu \in]0,1[$ und $\delta > 0$. Dabei ist die erste Gleichung ein repräsentativer Erhaltungssatz, während die zweite Gleichung die wesentlichen Materieeigenschaften beschreibt. In [Chan95] zeigt Changjiang, wie sich (1.3) auf diagonale Gestalt bringen läßt, so daß dann sogar Sprünge in den Anfangsdaten zugelassen werden könnten.

Ein weiteres sehr interessantes und dennoch einfaches Beispiel bietet die eindimensionalle Gasdynamik. Die Euler-Gleichungen lassen sich in der Form (1.1) schreiben, wobei die Matrix $\mathbf{A}(\mathfrak{u})$ drei voneinander verschiedene Eigenwerte hat und invertierbar ist. Das System ist streng hyperbolisch und kann mit bekannten Methoden [Spiv79] diagonalisiert werden. Andererseits sind dieselben Gleichungen in (mitschwimmenden) Lagrangeschen Koordinaten so geartet, daß ihre Diagonalisierung eine spezielle Technik erfordert, wie sie in dieser Arbeit für die Einsteinschen Feldgleichungen für kugelsymmetrische ideale Flüssigkeit entwickelt wurde (siehe Abschnitt 1.1.2). Dabei zeigt sich, daß es auch in der eindimensionalen klassischen Hydrodynamik eine sogenannte **Zwangsbedingung** gibt, was folgendes bedeutet: Zusätzlich zu dem System (1.1), den sogenannten Zeitentwicklungs- oder Evolutionsgleichungen müssen weitere Differentialgleichungen (die Zwangsbedingungen) erfüllt werden. Insgesamt hat man also mehr Gleichungen als unabhängige Unbekannte. Die Evolutionsgleichungen bestimmen die zeitliche Entwicklung vollständig (gleich viele Unbekannte wie Differentialgleichungen). Sie erzwingen darüber hinaus, daß die zusätzlichen Gleichungen (Zwangsbedingungen) überall im Lösungsgebiet gelten, falls nur die Anfangswertvorgaben diese Zwangsbedingungen erfüllen (Propagation der Zwangsbedingungen). Die Zwangsbedingungen stellen somit eine Einschränkung an die Wahl der Anfangswertvorgaben dar.

Das in dieser Arbeit wichtigste Differentialgleichungssystem wird für die sechs abhängigen Unbekannten

$$\mathfrak{u} = (R, M, \varrho, U, v_1, v_2)$$

auf Seite 115 angegeben. Dabei sind die Größen v_1 und v_2 aus den intrinsischen Ableitungen der übrigen Unbekannten bestimmt, so daß zunächst 4 Unbekannte vorgebbar erscheinen. Tatsächlich führen aber die zwei Zwangsbedingungen dazu, daß nur zwei Unbekannte (fast) frei vorgegeben werden können. Dazu wurden (ϱ, R) in dieser Arbeit ausgewählt, was vor allem technische Gründe hat (siehe Abschnitt 2.4.4).

Außer in der relativistischen Hydrodynamik findet man solche Zwangsbedingungen in der Elektrodynamik, wobei von den Maxwell-Gleichungen für die elektrische (bzw. magnetische) Feldstärke **E** (bzw. **H**)

$$\partial_t \mathbf{E} = \mathbf{rot}\ \mathbf{H}, \quad \partial_t \mathbf{H} = -\mathbf{rot}\ \mathbf{E},$$
$$div\ \mathbf{E} = 0, \quad div\ \mathbf{H} = 0$$

die letzten beiden Gleichungen Zwangsbedingungen sind, die zusätzlich zu den 6 Evolutionsgleichungen für die 6 Komponenten von $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ gelten müssen und somit die Anfangswerte einschränken. Ferner gibt es, wie oben bereits erwähnt wurde, in der klassischen Hydrodynamik eine Zwangsbedingung[1], wenn

[1] physikalisch bedeutet sie „die Kontinuitätsgleichung impliziert Massenerhaltung“, siehe Seite 140

man die eindimensionalen Euler-Gleichungen in Lagrangeschen Koordinaten schreibt (siehe Abschnitt 4.5.2).

1.1.2 Mathematische Ergebnisse, Methoden und Ziele

Die wichtigste Motivation für die Entwicklung der mathematischen Vorgehensweise war der Wunsch nach einer Existenzaussage aus der relativistischen Hydrodynamik. Wie im Abschnitt 1.2.1 genauer ausgeführt wird, soll gezeigt werden daß es reguläre raumartige Anfangsdaten gibt, aus denen sich vermöge der Einsteinschen Feldgleichungen für ideale Flüssigkeit im kugelsymmetrischen Fall zwingend eine Raumzeit mit einem Schwarzen Loch entwickeln muß. Dieser inhaltliche Anspruch führt zu recht komplexen Anforderungen an die Anfangswertvorgaben des zu lösenden Anfangsrandwertproblems für das quasilineare Systen (1.1). Von den Anfangsdaten $\mathfrak{u}_0$ kann[2] daher nicht auch noch verlangt werden, daß sie zusammen mit den ebenfalls vorzugebenden Randwerten $\mathfrak{u}_{\text{Rand}}$ die Eckbedingung 2. Ordnung erfüllen. Somit kommt es zu einem Knick von $\partial_t \mathfrak{u}$, der die Anwendung bekannter Existenz- und Eindeutigkeitssätze verhindert.

Die übliche Beweismethode für zeitlich lokale Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von quasilinearen partiellen Differentialgleichungssystemen beruht auf sogenannten a-priori-Schranken und dem Fixpunktsatz. Für geeignete Funktionen $\mathfrak{w}$ benutzt man dabei, daß die lineare Differentialgleichung

$$\partial_t \mathfrak{u} + \mathbf{A}(\mathfrak{w}) \cdot \partial_x \mathfrak{u} = \mathfrak{b}(\mathfrak{w}) \tag{1.4}$$

eine eindeutige Lösung $\mathfrak{u}$ hat. Durch geschickte Definition von

[2] zumindest ist technisch kein Weg erkennbar, wie man den quasi konstruktiven Existenzbeweis zum Lösen des Vorgabeproblems dahingehend erweitern könnte, daß die Eckbedingung 2. Ordnung garantiert würde. Physikalisch ist aber umgekehrt auch kein Grund erkennbar, warum dort wirklich ein Knick von $\partial_t \varrho$ vorliegen müßte

„geeignete Funktionen $\mathfrak{w}$“ läßt sich dann zeigen, daß die Abbildung $\mathcal{T}$, die $\mathfrak{w}$ auf $\mathfrak{u}$ wirft, eine Kontraktion ist und somit eine Iteration $\mathfrak{u}_{n+1} := \mathcal{T}(\mathfrak{u}_n)$ zu einem Fixpunkt $\mathfrak{u}_\infty := \mathcal{T}(\mathfrak{u}_\infty)$ führt, der die eindeutige Lösung des quasilinearen Systems ist (siehe Abschnitt 3.1.9).

Derartige Beweise sind technisch recht aufwendig. Eine deutliche Vereinfachung ergibt sich für den Fall, daß die Matrix $\mathbf{A}$ eine Diagonalmatrix ist. Deshalb und weil sich für diagonale Systeme in der numerischen Anwendung zusätzliche Möglichkeiten auftun (siehe Kapitel 5), habe ich ein spezielles Verfahren zur Diagonalisierung entwickelt. Bisher bekannte Techniken zur Diagonalisierung, wie sie von Spivak in [Spiv79] beschrieben wurden, setzen voraus, daß die Matrix $\mathbf{A}$ invertierbar ist, was für die relativistische Anwendung nicht der Fall ist. Dafür liegen aber Zwangsbedingungen vor, mit deren Hilfe sich dennoch eine Diagonalisierung erreichen läßt, was in Kapitel 4 ausgeführt wird.

Die Evolutionsgleichungen der relativistischen Hydrodynamik im kugelsymmetrischen Fall haben zwei unabhängige Unbekannte (t, r) und lassen sich dann in diagonaler Gestalt

$$\partial_t \mathfrak{u} + \mathbf{\Lambda}(\mathfrak{u}) \cdot \partial_x \mathfrak{u} = \mathfrak{b}(\mathfrak{u}) \tag{1.5}$$

schreiben, wobei $\mathbf{\Lambda}(\mathfrak{u})$ eine Diagonalmatrix ist und die Lösung $\mathfrak{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ gesucht ist und für ein kleines $T > 0$ unter nicht sehr restriktiven Voraussetzungen existiert (lokaler Existenzsatz mit a-priori bestimmter „Lebensdauer“ T). In dieser Darstellung werden nicht nur die Beweise einfacher, sondern es wird sofort klar, welche Daten für ein gemischtes Anfangs-Randwertproblem wo vorzugeben sind.

Ferner läßt sich an diese Gestalt ein numerisches Verfahren ankoppeln, das mit adaptiv[3] mitschwimmenden Gitterpunk-

[3] d.h. man nimmt in kritischen Bereichen mehr und in harmlosen Bereichen weniger Stützstellen. Das wurde aber von mir nicht durchgeführt, sondern ist nur eine in diagonalen Systemen leicht umsetzbare Option

ten eine Verfolgung von Knicken ermöglicht, ohne daß es zu Überschwingern kommt.

Schließlich ist die diagonale Gestalt besser geeignet, um globale Existenzsätze mit klassischen Methoden anzugehen, wie neuere chinesische Arbeiten (siehe etwa [Yang97]) zeigen. Die dortigen Beweise für diagonale Systeme mit zwei Unbekannten erfordern aber so starke technische Einränkungen[4], daß sie für unsere Fragestellungen nicht zu gebrauchen sind.

1.2 Anwendung in der Hydrodynamik der Allgemeinen Relativitätstheorie

1.2.1 Das Problem

Betrachtet wird eine sphärisch symmetrische Raumzeit, die aus einer Materie-Kugel (Stern) aus idealer Flüssigkeit (Hydrodynamik) besteht und von Vakuum umgeben ist. Die Raumzeit wird durch die Gravitation zusammen gehalten (allgemeine Relativitätstheorie). Die Materie-Kugel ist zur Anfangszeit regulär (reguläre Anfangswerte) und soll so kollabieren, daß innerhalb endlicher Eigenzeit ein Schwarzes Loch entsteht. Das Problem führt zu einer Anfangsrandwertaufgabe (Randwerte am Sternrand) für ein hyperbolisches nichtlineares partielles Differentialgleichungssystem der Form (1.1). Die Fragestellung erfordert eigentlich eine zeitlich globale Existenz- und Eindeutigkeitsaussage, läßt sich aber auf ein lokales Problem zurück führen (siehe die unteren Schritte I und II und die Einleitung zu Abschnitt 2.4.3)

[4] U.a. wird gefordert, daß die Anfangsdaten klein sind in der C^0–Norm

1.2.2 Existenzsatz

Daß es Schwarze Löcher gibt, bezweifelt kaum jemand. Hier soll der *strenge Beweis* erbracht werden, daß ein Schwarzes Loch innerhalb endlicher Eigenzeit entsteht aufgrund der Einsteinschen Feldgleichungen für ideale Flüssigkeit im kugelsymmetrischen Fall, wobei Anfangsdaten vorgegeben werden, die harmlos sind und von denen Lichtflucht ins Unendliche deshalb möglich ist.

Die Konstruktion einer solchen Raumzeit mit Schwarzem Loch erfolgt in zwei Schritten, wobei die im Schritt I zu erzeugende Raumzeit aus drei Teil-Raumzeiten[5] konstruiert wird, von denen hier zunächst nur die wichtigste erwähnt sei.

Schritt I: In einer Umgebung V_H einer Anfangsdatenfläche H, die sich später als Ereignishorizont erkennen läßt, wird die Existenz[6] und Eindeutigkeit der Lösung einer Anfangsrandwertaufgabe bewiesen (Satz 2.4.3 auf Seite 44). Die Randwertvorgaben garantieren den Sternrand. Die Anfangswertvorgaben erfolgen auf $H = [t^\star = 0]$[7] derart, daß für $[t^\star > 0]$ (nicht aber für $[t^\star < 0]$) ein **Schwarzes-Loch-Gebiet** entsteht. Als wesentliche Anfangsdaten können (ϱ_H, R_H) oder äquivalent (ϱ_H, U_H) vorgegeben werden, wobei ϱ_H die Massenenergiedichte, R_H ein Maß für die Oberfläche der Kugelsymmetriesphären und U_H dessen zeitliche Veränderung (Geschwindigkeit) auf $H = [t^\star = 0]$ seien. Hier werden (ϱ_H, R_H) als wesentliche Anfangsdaten gewählt. Diese können frei vorgegeben

[5] Diese sind a) eine Materie-Raumzeit V_F in Zentrumsnähe, b) eine Materie-Raumzeit V_H mit positivem Abstand vom Zentrum und c) eine eindeutig an den Sternrand anschließbare Vakuum-Raumzeit.

[6] Hier reicht eine zeitlich lokale Aussage, wie im folgenden Abschnitt 1.2.3 begründet wird

[7] Dies ist zwar eine lichtartige Fläche, aber sie ist nicht charakteristisch, weil es bei Kugelsymmetrie keine Gravitationswellen gibt

werden bis auf die folgenden physikalischen Einschränkungen[8]

- positive Massenenergiedichte, d.h. $\varrho_H > 0$[9]
- Kollaps, d.h. $U_H < 0$[10]
- Massendichte ϱ_H im Verhältnis zu R_H so konzentriert[11], daß für $[t^\star > 0]$ (nicht aber für $[t^\star < 0]$) ein **Schwarzes-Loch-Gebiet**[12] entsteht

Diese Bedingungen sind auf der Anfangsdatenfläche $[t^\star = 0]$ formuliert. Es wird gezeigt (Satz 2.4.10 auf Seite 59), daß es eine große Klasse von wesentlichen Anfangswertfunktionen (ϱ_H, R_H) gibt, welche diese physikalischen Einschränkungen erfüllen (Lösen der Zwangsbedingungen). Die sich aus den Anfangsdaten entwickelnde Hilfsraumzeit (Materie-Bereich) wird durch Anschluß einer Vakuum-Raumzeit ins Unendliche fortgesetzt.
Schritt II: Im Gebiet $[t^\star < 0]$ wird eine raumartige Anfangswertfläche S gewählt (siehe Abbildung 2.2 auf Seite 50). Als endgültige Anfangsdaten d wird schließlich die Restriktion der Raumzeit aus Schritt I auf diese Fläche S gewählt. Diese Anfangswerte führen per constructionem innerhalb endlicher Eigenzeit zu einem Schwarzen Loch (im Sinne von Abschnitt 1.2.1), d.h. es bildet sich bei $[t^\star = 0]$ ein Ereignishorizont und dahinter eingefangene Flächen.

Von Müller zum Hagen stammt diese Idee, aus einem lokalen Existenzsatz durch geschickte Datenvorgabe eine globale

[8]In der Einleitung zu Abschnitt 2.4.1 auf Seite 38 werden diese sprachlich ausführlicher beschrieben und in Definition 2.4.7 auf Seite 56 unter dem Begriff (ϱ_H, R_H)–Bedingungen streng formal definiert
[9]genauer siehe (2.49) auf Seite 54
[10]genauer siehe (2.50) auf Seite 54
[11]genauer siehe (2.51,2.52) auf Seite 54
[12]dadurch wird H ein Ereignishorizont

Aussage herauszuziehen sowie einige Formulierungen wichtiger Sätze und Einleitungstexte.

1.2.3 Methoden und Schwierigkeiten

Lokale und globale Aussagen

Die Aussage aus Schritt II ist eine zeitlich globale („... innerhalb endlicher Eigenzeit ...“). Sie kann dennoch mit einem zeitlich lokalen Existenzsatz bewiesen werden. Dies ist möglich, indem zunächst Daten d_H auf dem Ereignishorizont $H = [t^\star = 0]$ vorgegeben werden, welche die Entstehung eines Schwarzen Loches erzwingen (Schritt I auf Seite 9). In einer beliebig kleinen Umgebung von $H = [t^\star = 0]$ läßt sich dann im Gebiet $[t^\star < 0]$ eine endgültige Anfangsdatenfläche S so wählen, daß aus den dort induzierten Daten die Schwarzes-Loch-Raumzeit entstehen muß (Schritt II auf Seite 10). Dieses funktioniert nur, weil die Daten d_H genau auf $[t^\star = 0]$, also der Trennfläche zwischen Schwarzes-Loch-Gebiet $[t^\star > 0]$ und Nicht-Schwarzes-Loch-Gebiet $[t^\star < 0]$ vorgegeben werden.

Zentrum der Kugelsymmetrie

Die Behandlung des Kugelsymmetrie-Zentrums $r = 0$ wurde in Abschnitt 1.2.2 übergangen, wobei r der „Radius“ des sphärisch symmetrischen Koordinatensystems ist. Bei $r = 0$ haben die in Kugel-Koordinaten geschriebenen Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie (und auch der klassischen Theorie) eine Singularität. Diese Schwierigkeit wird in Abschnitt 2.4 umgangen, indem die Gleichungen in Zentrumsnähe in zulässigen (regulären) Koordinaten[13] ausgedrückt werden.

[13] In der klassischen Theorie wären dies beispielsweise kartesische Koordinaten

1.3 Aufbau dieser Arbeit

Hier wurde ein Überblick über die mathematischen und physikalischen Ergebnisse gegeben.

Im folgenden Kapitel 2 werden alle Aussagen aus der allge-