

# 2. Ein Existenzsatz aus der allgemein- relativistischen Hydrodynamik

## 2.1 Einleitung

### 2.1.1 Die Grundaussage und Vergleich zu anderen Arbeiten mit ähnlicher Zielsetzung

Alle Betrachtungen beziehen sich ausschließlich auf kugelsymmetrische Raumzeiten, sofern nichts anderes ausdrücklich gesagt wird. Die Grundaussage wurde qualitativ bereits in Abschnitt 1.2.1 beschrieben. Die strenge Fassung befindet sich in Abschnitt 2.4.

In vielen interessanten Veröffentlichungen (z.B. in [Schö83], [Male88]) wurde gezeigt, daß aus raumartigen Anfangsdaten mit hinreichend hoher Massenkonzentration nichts anderes als eine Schwarzes-Loch-Raumzeit entstehen kann. Dabei wurde kein Existenzbeweis geführt, sondern gezeigt, daß eine Lösung mit hinreichend massereichen Anfangsdaten eingefangene Flä-

chen enthält<sup>1</sup>. Eingefangene Flächen haben die Eigenschaft, daß **auch** nach außen gerichtete Lichtstrahlen konvergieren (lokale Eigenschaft), also insbesondere nicht ins Unendliche gelangen können (globale Eigenschaft). Das interessanteste Objekt ist der Ereignishorizont, die Grenze zwischen „Lichtstrahlen können das Unendliche erreichen“ und „Lichtstrahlen können das nicht Unendliche erreichen“.

Es wurden also Bedingungen für das Vorhandensein eingefangener Flächen erarbeitet. Der physikalisch wichtigste Gegenstand dieser Arbeit sind Bedingungen an Anfangswertvorgaben auf einer *regulären*, raumartigen Anfangsfläche (ohne eingefangene Flächen) so zu finden, daß sich aus diesen eine Schwarzes-Loch-Raumzeit entwickelt. Dabei wird gezeigt, daß die Raumzeit aufgrund eines lokalen Existenzsatzes existiert und einen Ereignishorizont (globale Eigenschaft) enthält. Ferner werden in dieser Arbeit Aussagen zu Stabilität und Vielfältigkeit der Anfangsdaten begründet.

Da für ideale Flüssigkeit als Gravitationsquelle der Raumzeit nur (zeitlich) lokale Existenz- und Eindeutigkeitsätze verfügbar zu sein scheinen, gab es in der Literatur bisher einerseits Raumzeiten, die von vornherein eingefangene Flächen enthalten und andererseits Raumzeiten, deren zeitliche Entwicklung nicht aufgrund eines formalen Existenzbeweises bis hin zur eingefangenen Fläche gesichert sind.

In dieser Arbeit, deren wichtigste relativistische Resultate bereits in [AIMH94] vorgestellt wurden, werden die bekannten Resultate in drei Richtungen verallgemeinert:

- (i) Die raumartige Anfangshyperfläche  $C$ , auf der Daten so vorgegeben werden, daß sich (nach endlicher Eigenzeit) eingefangene Flächen entwickeln, ist Teil einer *harmlosen*

---

<sup>1</sup>wohingegen in dieser Arbeit *harmlose* Anfangsdaten auf einer raumartigen Anfangsfläche gegeben werden, von der Lichtflucht möglich ist, d.h. nach außen gerichtete Lichtstrahlen können das Unendliche erreichen

Raumzeit. Harmlosigkeit meint hier, daß kein Punkt der Anfangsfläche eine eingefangene Fläche berührt. Insbesondere ist kein Teil von  $C$  in einer eingefangenen Fläche enthalten;

- (ii) Es wird das Entstehen eines *Ereignishorizontes*, in dessen Zukunft eingefangene Flächen liegen, bewiesen. Die sich entwickelnde Raumzeit umfaßt dabei eine Umgebung dieses Horizontes.
- (iii) Die Existenz und Eindeutigkeit der Raumzeit mit den gewünschten Eigenschaften wird bewiesen. Im Gegensatz dazu wurde in [Krie93], [Hayw93] und [Male88] angenommen, daß die Raumzeit bis hin zur eingefangenen Fläche existiert, d.h. daß die Lösung frühestens nach dem Auftreten eingefangener Flächen singulär wird.

Um eine Raumzeit mit idealer Flüssigkeit so zu konstruieren, daß (i), (ii) und (iii) erfüllt sind, wird wie folgt vorgegangen.

### 2.1.2 Aufbau dieses Kapitels und Vorgehensweise

Das Haupttheorem (Satz 2.4.4) befindet sich in Abschnitt 2.4.3 auf Seite 48. Die Herleitung dieses Theorems findet stufenweise in den Abschnitten 2.4.1 (Lemma 2.4.1 auf Seite 38) und 2.4.2 (Satz 2.4.3 auf Seite 44) statt.

Auf einer Hyperfläche  $H$  werden zunächst Hilfsdaten  $d_H$  gegeben (Schritt I aus Abschnitt 1.2.2 auf Seite 9). Die Daten haben spezielle, aber nicht zu sehr einengende Eigenschaften, die bewirken, daß sich die Hyperfläche  $H$  als Teil eines Ereignishorizontes entpuppt.

Außerdem werden am Sternrand  $B$  Daten so vorgegeben, daß eine Vakuum-Raumzeit angeschlossen werden kann. Es wird gezeigt, daß (zeitlich) lokal eine eindeutige Lösung  $V_1$

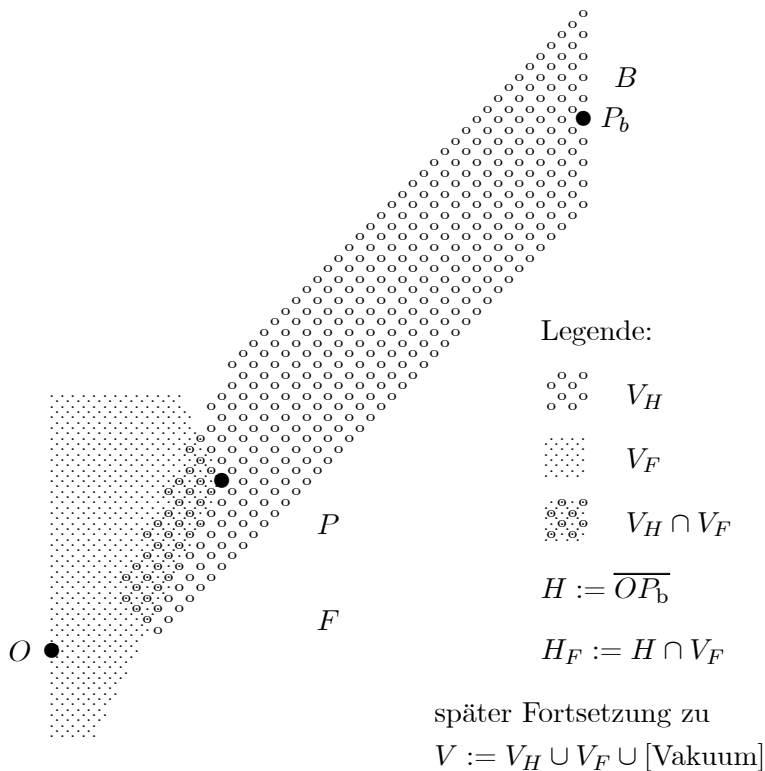


Abb. 2.1: Zur Veranschaulichung von  $V_1 := V_F \cup V_H$  werden die Teil-Raumzeiten in kugelsymmetrischen Koordinaten unter Weglassen der Winkel ( $\vartheta, \varphi$ ) durch verschiedene Schraffuren dargestellt. Dabei ist die Zeit nach oben abgetragen, der Symmetrie-Radius wächst nach rechts, und lichtartige Weltlinien sind mit Winkel  $45^\circ$  dargestellt.  $V_F$  und  $V_H$  sind so geformt, daß  $[V_F \cap V_H]$  durch Schallcharakteristiken derart begrenzt wird, daß  $[V_F \cup V_H]$  zum Abhängigkeitsgebiet von  $H \cap [V_F \cup V_H]$  gehört.

existiert, deren Restriktion auf  $H \cup B$  die vorgegebenen Daten liefert.

Tatsächlich erfolgt die Konstruktion der Lösung  $V_1$  in zwei Bereichen, um Schwierigkeiten aus der Singularität kugelsymmetrischer Koordinaten im Zentrum der Kugelsymmetrie zu umgehen, wie im folgenden beschrieben und in Abbildung 2.1 veranschaulicht wird. Zunächst werden auf einer raumartigen Anfangsfläche  $F$  unter Verwendung regulärer Koordinaten Anfangsdaten vorgegeben, die kugelsymmetrisch sind. Nach bekannten Sätzen (siehe etwa [Rend92]) existiert eine eindeutige Lösung  $V_F$ . Diese ist wieder kugelsymmetrisch<sup>2</sup>.

Die Restriktion der Lösung  $V_F$  auf den aus dem Symmetriezentrum  $O$  hinausführenden Lichtkegel  $H_F := \overline{OP}$  wird zu den Hilfsdaten  $d_H$  fortgesetzt. Dann sind Existenz und Eindeutigkeit nur noch für  $V_H$ , wo kugelsymmetrische Koordinaten benutzt werden dürfen, zu zeigen, denn mit  $V_F$  existiert eine eindeutige Raumzeit, die auf  $H_F$  die Anfangsdaten  $d_{H|H_F}$  annimmt.

Hat man nun eine eindeutige Lösung  $V_1$  in einer Umgebung von  $H$ , so findet man darin in der Vergangenheit von  $H$  eine raumartige Hyperfläche  $C$ , auf der  $V_1$  reguläre Anfangsdaten  $d$  induziert.

Ausgehend von diesen *harmlosen* Daten  $d$  auf der raumartigen Anfangsfläche  $C$  entwickelt sich eine eindeutige Lösung (Schritt II aus Abschnitt 1.2.2 auf Seite 10). In der Zukunft von  $C$  ist diese Entwicklung mit  $V_1$  identisch und enthält die Hyperfläche  $H$ . Die Hilfsdaten  $d_H$  wurden dabei so vorgegeben, daß die lichtartige Fortsetzung von  $H$  ins Vakuum, welches sich an  $V_1$  eindeutig anschließen läßt, ein Ereignishorizont ist.

Im folgenden werden daher Bedingungen an die Hilfsdaten

---

<sup>2</sup>Jede Rotation der Lösung ist nämlich eine Entwicklung derselben Anfangsdaten, da diese nach Voraussetzung unter kugelsymmetrischer Rotation invariant sind. Wegen der Eindeutigkeit dieser Entwicklung bleibt die Lösung also unter Rotation unverändert.

$d_H$  erarbeitet, unter denen in dieser Weise der Ereignishorizont notwendigerweise entsteht.

### 2.1.3 Massenkontrolle

Die Kontrolle der Masse findet nicht auf  $C$ , der raumartigen Anfangsfläche, sondern auf  $H$  statt, indem geeignete Hilfsdaten  $d_H$  gegeben werden. Dabei muß gelten

$$\frac{2m}{R} < 1 \text{ auf } H \setminus B, \quad \frac{2m}{R} = 1 \text{ auf } H \cap B, \quad (2.1)$$

wobei  $B$  der Sternrand ist,  $m$  die von Tolman eingeführte Masse aus [Misn68] ist, und

$$R(P) := [\text{Krümmung der durch } P \text{ bezeichneten Sphäre}]^{-1/2}$$

ein Maß für die Oberfläche der Symmetriesphäre (Krümmungsradius) sei. Diese Bedingung ist scharf: Ließe man  $\frac{2m}{R} < 1$  auf ganz  $H$  zu, wäre die lichtartige Fortsetzung von  $H$  ins Vakuum kein Ereignishorizont.

## 2.2 Konventionen, Definitionen und Koordinatenfestlegungen

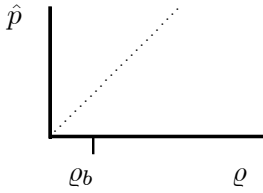
### 2.2.1 Die Zustandsgleichung

Die Zustandsgleichung sei durch eine  $C^2$ -Funktion  $\hat{p}$  gegeben, welche den Druck  $p$  und die Massenenergiedichte  $\varrho$  vermöge

$$p(x^a) = \hat{p}(\varrho(x^a)), \quad a = 1, 2, 3, 4$$

verbindet und die Bedingungen

$$0 < \frac{d\hat{p}}{d\varrho} < 1 \quad (2.2)$$



und

$$\hat{p}(\varrho) > 0 = \hat{p}(\varrho_b) \quad \text{für } \varrho > \varrho_b \quad (2.3)$$

erfüllt, wobei  $\varrho_b > 0$  eine gegebene Konstante sei.

Adiabatisches Gas, für welches die Zustandsgleichung  $p = \kappa \varrho^\gamma$  lautet, kann hier nicht behandelt werden. Hier wird vielmehr ein Stern mit fester Oberfläche beschrieben, im Gegensatz zu einer Gaswolke, bei der die Materie zum Rand hin stetig verschwindet.

### 2.2.2 Die Einsteinschen Feldgleichungen

Mit dem Fluid-Vektor  $u^a$ , der Metrik  $g^{ab}$  und dem Einstein-Tensor

$$G^{ab} := R^{ab} - \frac{1}{2}g^{ab}\mathcal{R},$$

wobei  $R^{ab}$  der Ricci-Tensor und  $\mathcal{R} := R_a^a$  der Krümmungsskalar sind, lauten die Einsteinschen Feldgleichungen für ideale

Flüssigkeit

$$\frac{1}{8\pi}G^{ab} = T^{ab} := (\varrho + \hat{p}(\varrho)) u^a u^b + \hat{p}(\varrho)g^{ab} \quad (2.4)$$

und  $u^a u_b = -1$ .

Die Ableitung in Richtung des Fluid-Vektors wird durch

$$D_t := u^a \partial_{x^a} \text{ mit } \partial_{x^a} := \frac{\partial}{\partial x^a}$$

bezeichnet.  $D_r$  sei der auf  $D_t$  senkrechte Einheitsvektor, der außerdem auf den Kugelsymmetrie-Sphären senkrecht stehe und räumlich nach außen gerichtet sei.

Im Zentrum  $O$  der Kugelsymmetrie ist  $D_r$  nicht eindeutig definiert, da in  $O$  jeder Vektor senkrecht auf der unendlich kleinen Sphäre steht. Wenn allerdings in regulären Koordinaten eine kugelsymmetrische Raumzeit betrachtet wird, ist es auch gleichgültig, welchen Repräsentanten man für  $D_r$  in  $O$  wählt.

Mit diesen Vektoren werden die Skalarfelder

$$\begin{aligned} R &:= 1/\sqrt{[\text{Krümmung der Symmetrie-Sphären}]}, \\ U &:= D_t R \quad \text{und} \quad \Gamma := D_r R \end{aligned} \quad (2.5)$$

definiert. Ferner werden die Hilfsfunktionen<sup>3</sup>

$$\hat{\phi}(\varrho) := - \int_{\varrho_b}^{\varrho} \frac{\hat{p}'(x)}{\hat{p}(x) + x} dx \quad (2.6)$$

und

$$\hat{n}(\varrho) := n_b \exp \left( \int_{\varrho_b}^{\varrho} \frac{1}{\hat{p}(x) + x} dx \right) \quad (2.7)$$

definiert, wobei  $\varrho_b$  aus (2.2) und  $n_b$  positive Konstante seien.

---

<sup>3</sup>Das Apostroph ' bezeichnet dabei die klassische Ableitung einer Funktion einer reellen Veränderlichen.



In (2.7) wurde  $\hat{n}$  so definiert, daß  $n := \hat{n} \circ \varrho$  die Baryonen-zahldichte zur Massenenergiedichte  $\varrho$  sein kann, wobei das 1. Gesetz der Thermodynamik (lokale Energieerhaltung) erfüllt ist.

### 2.2.3 Die Koordinaten mit lichtartiger Anfangsfläche

Im folgenden Lemma wird ausgehend von einer kugelsymmetrischen Raumzeit aus idealer Flüssigkeit ein Koordinatensystem gebildet, in dem die Zeit mit  $t^* \in [-T, T]$  und die räumliche Position der Sphären mit  $r^* \in [0, r_b]$  parametrisiert werden. Dabei bezeichnen  $[r^* = 0]$  die Weltlinie des Kugelsymmetrie-Zentrums und  $[r^* = r_b]$  den Sternrand.

**Lemma 2.2.1** *a) Gegeben seien reellwertige Funktionen  $\varrho_H$  und  $R_H : [0, r_b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Durch*

$$\begin{aligned} B_H(x) &:= \int_0^x e^{-\hat{\phi}(\varrho_H(y))} dy \\ \text{und } A_H(x) &:= \int_0^x 4\pi \hat{n}(\varrho_H(y)) R_H^2(y) dy \end{aligned} \quad (2.8)$$

werden Hilfsfunktionen auf  $[0, r_b]$  definiert. Gegeben sei weiter eine kugelsymmetrische Raumzeit aus idealer Flüssigkeit  $(ds^2, u^a \partial_{x^a}, \varrho)$ . Dann gibt es ein Koordinatensystem, dessen Linienelement sich in der Form

$$\begin{aligned} ds^2 &= e^{\lambda} dr^{*2} + R^2 (d\vartheta^2 + (\sin^2 \vartheta) d\varphi^2) \\ &\quad - e^{2\phi} (dt^* + B'_H(r^*) dr^*)^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

schreiben läßt, wobei  $\lambda$ ,  $R$  und  $\phi$  von  $(t^*, r^*)$  abhängen und

$$u^a \partial_{x^a} = e^{-\phi} \partial_{t^*} \quad (2.10)$$

gilt. Definiert man  $A : [-T, T] \times [0, r_b] \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$A(t^*, r^*) := \int_0^{r^*} 4\pi \hat{n}(\varrho(t^*, x)) \cdot R^2(t^*, x) \cdot e^{\frac{1}{2}\lambda(t^*, x)} dx, \quad (2.11)$$

2. Ein Existenzsatz aus der allg.-relativist. Hydrodynamik

---

so gilt

$$\partial_{t^*} A = 0, \quad (2.12)$$

d. h. der Ausdruck  $A(t^*, r^*)$  verändert sich nur bei Veränderung von  $r^*$ .

b) Die Raumzeit möge nun noch auf  $H := [t^* = 0]$  die durch  $\varrho_H$  und  $R_H$  gegebenen Daten annehmen, d. h.<sup>4</sup>

$$\varrho(0, \cdot) = \varrho_H \text{ und } R(0, \cdot) = R_H \text{ auf } [0, r_b]$$

Nun können und werden die Koordinaten aus (2.9) und (2.10) fixiert durch

$$\begin{aligned} \phi(\cdot, r_b) &= \hat{\phi}(\varrho_H(r_b)) \quad \text{auf } [-T, T] \\ \text{und } A(0, \cdot) &= A_H \quad \text{auf } [0, r_b]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Letzteres ist gleichwertig mit  $\lambda = 0$  auf  $H$ . Dann ist  $H$  lichtartig. Außerdem gelten für  $\phi$  und  $\lambda$  aus (2.9)

$$\phi = \hat{\phi} \circ \varrho \quad \text{und} \quad e^{\lambda/2} = \frac{1}{\Gamma} (\partial_{r^*} - B'_H \partial_{t^*}) R. \quad (2.14)$$

Diese durch (2.9), (2.10) und (2.13) festgelegten Koordinaten werden in dieser Arbeit als  $(t^*, r^*)$ -**Koordinaten** bezeichnet.

Dieses Koordinatensystem steht in enger Beziehung zu den  $(t, r)$ -Koordinaten, welche Misner (etwa [Misn68]) verwendet. Beide Systeme beschreiben sphärisch symmetrische, mitschwimmende Koordinaten. Im Lemma wird die Zeit  $t^*$  so gewählt, daß  $t^* = 0$  auf der Hyperfläche  $H$  gilt, wo  $(\varrho_H, R_H)$  vorgegeben werden.

Diese Daten werden in (2.13) zur Fixierung des Koordinatensystems benutzt.

---

<sup>4</sup>Die Schreibweise mit dem Platzhalter  $\cdot$  erspart einem, eine Variablenbezeichnung zu verwenden. Statt  $\varrho(0, x) = \varrho_H(x)$  oder  $\varrho(0, y) = \varrho_H(y)$  schreibt man kurz  $\varrho(0, \cdot) = \varrho_H$ .

**Beweis** Aus der Literatur [Misn68, S. 180] ist bekannt, daß bei gegebener kugelsymmetrischer Raumzeit aus idealer Flüssigkeit  $(ds^2, u^a \partial_{x^a}, \varrho)$  ein Koordinatensystem existiert, in dem

$$ds^2 = g_{rr}(t, r)dr^2 + R^2(t, r) (d\vartheta^2 + (\sin^2 \vartheta) d\varphi^2) + g_{tt}(t, r)dt^2 \quad (2.15)$$

und  $u^a \partial_{x^a} = \sqrt{-g_{tt}} \partial_t$  gelten. Diese Koordinaten sind bis auf Transformationen der Form  $t \mapsto f(t)$  bzw.  $r \mapsto h(r)$  fixiert.<sup>5</sup>

Durch die Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} t^* &= t - B_H(r), & r^* &= r, \\ \partial_{t^*} &= \partial_t, & \partial_{r^*} &= B'_H(r) \partial_t + \partial_r \end{aligned} \quad (2.16)$$

geht (2.9) wegen  $dt = dt^* + B'_H(r^*)dr^*$  über in (2.15) mit

$$g_{rr} = e^\lambda \quad \text{und} \quad g_{tt} = e^{-2\phi}$$

und  $u^a \partial_{x^a} = \sqrt{-g_{tt}} \partial_t = e^\phi \partial_t$ .

Dabei wurden die Bezeichnungen der Skalare  $\varrho, R, U, \Gamma, A$  und  $n := \hat{n} \circ \varrho$  beibehalten (gleiche Notation in verschiedenen Koordinaten<sup>6</sup>).

Insbesondere ist unser  $A$  aus (2.12) die bei Misner in (5.2.1) definierte Größe<sup>7</sup>, deren zeitliche Konstanz er ab (5.2.2) in [Misn68] zeigt. Somit ist Teil a) aus dem Lemma bewiesen.

---

<sup>5</sup>Misner nimmt in [Misn68] diese Fixierung in (5.2.3) und (5.5.7) durch  $r = A(B_H(r), r)$  und  $\phi(\cdot, r_b) = 0$  vor.

<sup>6</sup>Ist etwa  $\Gamma$  die bei Misner verwandte Funktion  $(t, r) \mapsto \Gamma(t, r)$ , hätten wir eine neue Funktion  $(t^*, r^*) \mapsto \Gamma^*(t^*, r^*)$  durch

$$\Gamma^*(t^*, r^*) := \Gamma(t^* + B_H(r^*), r^*)$$

definieren müssen. Das unterbleibt der Einfachheit halber, da nicht gleichzeitig in beiden Koordinatensystemen gearbeitet wird.

<sup>7</sup>Inhaltlich ist  $A(r)$  die Anzahl der Baryonen, welche in die mit  $r$  bezeichnete Kugelsymmetrie-Sphäre eingeschlossen sind. Diese bleibt folglich in mitschwimmenden Koordinaten zeitlich unverändert.

2. Ein Existenzsatz aus der allg.-relativist. Hydrodynamik

Für Teil b) bemerkt man, daß die Koordinaten-Fixierung (2.13) in  $(t, r)$ -Koordinaten

$$g_{tt}(\cdot, r_b) \equiv -e^{2\hat{\phi}(\varrho_H(r_b))} \text{ und } A(B_H(r), r) = A_H(r), \quad r \in [0, r_b]$$

lautet. Die Bedingung an  $A$  impliziert, daß  $e^\lambda \equiv 1$  ist auf  $H$ . Um die Lichtartigkeit von  $H = \{(B_H(r), r); r \in [0, r_b]\}$  zu zeigen, errechnet man des Tangentenvektors  $B'_H(r)\partial_t + \partial_r$  Länge als Integral über

$$\sqrt{g_{tt}B'_H(r) + g_{rr}} = \sqrt{-e^{2\hat{\phi}(\varrho_H(r))} (B'_H(r))^2 + 1} = 0$$

zu 0, weil  $B'_H(r) = e^{\hat{\phi}(\varrho_H(r))}$  nach (2.8) gilt.

Die erste Aussage aus (2.14) folgt aus [Misn68, (5.2.6)]. Nach Integration gilt nämlich

$$\phi(t, r) = \hat{\phi}(\varrho(t, r)) + \psi(t),$$

wobei die Integrationskonstante durch die Koordinaten-Fixierung (2.13) zu  $\psi \equiv 0$  festgelegt wurde. Die letzte Behauptung folgt (jedenfalls für  $\Gamma > 0$ ) wegen  $\partial_r = \partial_{r^*} - B'_H(r^*)\partial_{t^*}$  aus (5.1.5) und (5.1.7).  $\square$

## 2.3 Feldgleichungen als quasilineares System

### 2.3.1 Die reduzierten Einstein-Gleichungen

Anstelle der vollen Einsteinschen Feldgleichungen (2.4) genügt es, die folgenden fünf Gleichungen zu erfüllen, zeigt Kind in [Kind91, Lemma 1]. Hier wird diese Aussage aber unter schwächeren Regularitätsbedingungen benötigt und bewiesen.

**Konvention 2.3.1** Seien  $G_1$  und  $G_2$  die Abschlüsse zweier einfach zusammenhängender Gebiete in  $[0, T] \times [0, r_b]$  so, daß  $\gamma := G_1 \cap G_2$  eine Kurve ist, deren Parametrisierung stetig differenzierbar ist.

Die Ableitung nach der ersten Unbekannten einer auf  $G_i$  definierten Funktion  $\partial_t$  werde durch einen Punkt und die andere Ableitung  $\partial_r$  durch ein Apostroph symbolisiert.

**Lemma 2.3.2** Seien  $R \in C^2(G_1 \cup G_2)$  sowie  $\varrho, \lambda$  und  $\phi \in C^1(G_1 \cup G_2)$  mit  $(\varrho, \lambda, \phi)|_{G_i} \in C^2$  für beide  $i = 1, 2$  gegeben. Diese Funktionen mögen die Materiegleichungen  $T^{ab}_{;b} = 0$  für  $a = t$  bzw.  $a = r$  erfüllen, die

$$\dot{\varrho} + (\varrho + p) \left( \frac{\dot{\lambda}}{2} + 2 \frac{\dot{R}}{R} \right) = 0 \quad (2.17)$$

bzw.

$$(\varrho + p) \phi' + p' = 0 \quad (2.18)$$

lauten, wobei  $p := \hat{p} \circ \varrho$  die Bedingung (2.3) erfülle. Außerdem seien von den zehn Feldgleichungen (2.4) die für  $ab = tt, ab = tr$  und  $ab = rr$

$$e^{-\lambda} \left( \lambda' \frac{R'}{R} - 2 \frac{R''}{R} - \frac{R'^2 - e^\lambda}{R^2} \right) + e^{-2\phi} \left( \dot{\lambda} \frac{\dot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} \right) = 8\pi\varrho, \quad (2.19)$$

$$2\dot{R}\phi' + R'\dot{\lambda} - 2\dot{R}' = 0 \quad (2.20)$$

und

$$e^{-\lambda} \left( 2 \frac{R'}{R} \phi' + \frac{R'^2 - e^\lambda}{R^2} \right) + e^{-2\phi} \left( 2 \frac{\dot{R}}{R} \dot{\phi} - \frac{\dot{R}^2}{R^2} - 2 \frac{\ddot{R}}{R} \right) = 8\pi p \quad (2.21)$$

erfüllt. Dann wird durch

$$ds^2 = e^\lambda dr^2 + R^2 (d\vartheta^2 + (\sin^2 \vartheta) d\varphi^2) - e^{2\phi} dt^2 \quad (2.22)$$

und  $u^a \partial_{x^a} = e^{-\phi} \partial_t$  eine kugelsymmetrische Raumzeit aus idealer Flüssigkeit ( $ds^2, u^a \partial_{x^a}, \varrho$ ) bestimmt, deren Koordinaten bis auf eine Transformation der Form  $t \mapsto f(t)$  bzw.  $r \mapsto h(r)$  fixiert sind.

**Beweis** Wie im Anhang A von [Kind91] ausgeführt sind jedenfalls für  $a = t$  und  $a = r$  die Bianchi-Identitäten  $G^{at}_{;t} = 0$  und  $G^{ar}_{;r} = 0$  in  $G_1$  bzw.  $G_2$  formulierbar. Somit liefert die Argumentation von Kind die Behauptung in  $G_1$  bzw.  $G_2$ .

Zu begründen ist hier, ob  $G_{\vartheta\vartheta} = 8\pi T_{\vartheta\vartheta}$  auch über  $\gamma$  hinweg gilt, da  $G_{\vartheta\vartheta}$  zweite Ableitungen von  $\lambda$  und  $\phi$  enthält. (Für  $\varphi$  anstelle von  $\vartheta$  ist die Feldgleichung dann auch in Ordnung).

Wir zerlegen  $G_{\vartheta\vartheta} = G_{\vartheta\vartheta}^* + G_{\vartheta\vartheta}^o$  in einen kritischen Summanden

$$G_{\vartheta\vartheta}^* := R^2 \left( e^{-2\phi} \ddot{\lambda} + e^{-\lambda} \phi'' \right) \quad \text{und} \quad G_{\vartheta\vartheta}^o \in C(G_1 \cup G_2).$$

Wegen  $T_{\vartheta\vartheta} = R^2 p \in C(G_1 \cup G_2)$  und  $G_{\vartheta\vartheta} = 8\pi T_{\vartheta\vartheta}$  auf beiden  $G_i$  ist dort  $G_{\vartheta\vartheta}^* = 8\pi T_{\vartheta\vartheta} - G_{\vartheta\vartheta}^o$  stetig. Weil aber die rechte Seite auf ganz  $G_1 \cup G_2$  stetig ist, müssen auch die rechts- und linksseitigen Limes von  $G_{\vartheta\vartheta}^*$  an  $\gamma$  gleich sein. Es gelten also die Feldgleichungen (2.4), obwohl die Ausdrücke  $\ddot{\lambda}$  und  $\phi''$  durchaus in  $\gamma$  unstetig sein können.  $\square$

### 2.3.2 Das System in $(t, r)$ -Koordinaten

Auch die reduzierten Einsteinschen Feldgleichungen aus dem Lemma 2.3.2 werden nicht direkt gelöst, sondern in ein System 1. Ordnung übersetzt. Dieser Abschnitt zeigt diese „Übersetzung“. Dabei ist auch zu erklären, wie das konkrete System der Zeitentwicklungsgleichungen die Zwangsbedingungen propagiert (siehe unten Schritt 5.-7. auf Seite 32).

**Lemma 2.3.3** *Sei eine sphärisch symmetrische Raumzeit aus idealer Flüssigkeit  $(ds^2, u^a \partial_{x^a}, \varrho)$  gegeben. Dann gibt es ein Koordinatensystem, dessen Linienelement sich in der Form*

$$ds^2 = e^\lambda dr^2 + R^2 (d\vartheta^2 + (\sin^2 \vartheta) d\varphi^2) - e^{2\phi} dt^2 \quad (2.23)$$

*schreiben läßt, wobei  $\lambda$ ,  $R$  und  $\phi$  von  $(t, r)$  abhängen und für den Fluid-Vektor  $u^a \partial_{x^a} = e^{-\phi} \partial_{t^*}$  gilt. Seien weiter reellwertige Daten-Funktionen  $\varrho_C$  und  $R_C : [0, r_b] \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Auf einer raumartigen Anfangsfläche  $C$ , die wie in (2.29) durch eine  $C^1$ -Funktion  $t_0$  parametrisiert sei, möge die Raumzeit diese Daten annehmen, d.h. es gelte*

$$\varrho(t_0(r), (r)) = \varrho_C(r) \quad \text{und} \quad R(t_0(r), (r)) = R_C(r)$$

*für  $r \in [0, r_b]$ . Außerdem seien die Koordinaten mit Hilfe einer streng wachsenden  $C^3$ -Hilfsfunktion  $A_C : [0, r_b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ , die in Null mit 3. Ordnung verschwinde, durch*

$$\phi(\cdot, r_b) \equiv \hat{\phi}(\varrho(r_b)) \quad \text{und} \quad \left(4\pi n R^2 e^{\lambda/2}\right)(t_0(r), r) = A'_C(r)$$

*fixiert ( $\hat{\phi}$  wurde in (2.6) definiert). Dann gelten*

$$\phi = \hat{\phi} \circ \varrho \quad \text{und} \quad e^{-\lambda/2} = \frac{4\pi n R^2}{A'_C(r)} \quad (2.24)$$

2. Ein Existenzsatz aus der allg.-relativist. Hydrodynamik

---

auf ganz  $G^\perp := \{(t, r); [t_0(r), t] \times \{t\} \text{ gehört zur Raumzeit } \}$ .  
Dort gelten mit  $R, U$  und  $\Gamma$  aus (2.5) von Seite 20 sowie  $M := \Gamma^2 - U^2$  die Zeitentwicklungsgleichungen<sup>8</sup>

$$\begin{aligned}
 \partial_t R &= e^\phi U \\
 \partial_t M &= -2e^\phi U \nu \\
 \partial_t \varrho + \beta \gamma \partial_r U &= -e^\phi (p + \varrho) \frac{2U}{R} \\
 \partial_t U + (\beta/\gamma) \partial_r \varrho &= e^\phi \nu \quad .
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

und auch die Zwangsbedingungen

$$\partial_r R = e^{\lambda/2} \Gamma \quad \text{und} \quad \Gamma^2 - U^2 - 1 + \frac{2m}{R} \equiv 0 \quad , \tag{2.26}$$

wobei die Abkürzungen

$$\begin{aligned}
 p &:= \hat{p} \circ \varrho, & n &:= \hat{n} \circ \varrho, \\
 \nu &:= \frac{M-1}{2R} - 4\pi p R, & s &:= \sqrt{\hat{p}^\flat \circ \varrho}, \\
 \gamma &:= \frac{\nu + \varrho}{\Gamma s}, & \beta &:= e^{\phi - \lambda/2} s
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

unter Verwendung von  $\hat{p}$  aus (2.3) und  $\hat{n}$  aus (2.7) von Seite 19 benutzt wurden.

Für die Masse  $m$  gelten  $m(\cdot, 0) = 0$ ,

$$\partial_t m = v_t := -4\pi p R^2 \partial_t R \quad \text{und} \quad \partial_r m = v_r := 4\pi \varrho R^2 \partial_r R, \tag{2.28}$$

Physikalisch ist  $m$  die von Tolman eingeführte Masse, wie schon auf Seite 18 erwähnt wurde. Das entstandene quasilineare System enthält keine Koordinatenfreiheit mehr. Diese

---

<sup>8</sup>Insbesondere in Beweisen werden die Gleichungen auch als  $R$ -Evo,  $M$ -Evo usw. angesprochen, womit dann die jeweilige Evolutionsgleichung gemeint sei.



wurde nämlich durch Wahl von  $\phi$  und  $\lambda$  aufgegeben. Wie in Lemma 2.2.1 wurden dabei zur Koordinatenfestlegung Vorgabedaten benutzt.

Im **Beweis**, der sich auf Seite 184 im Anhang befindet, wird gezeigt, daß sich unser System aus dem System der reduzierten Einstein- und Materiegleichungen (2.17) bis (2.21) gewinnen läßt.

**Jetzt soll umgekehrt gezeigt werden**, wie man ausgehend von den Evolutionsgleichungen (2.25) und den Zwangsbedingungen (2.26) zu einer Raumzeit aus idealer Flüssigkeit gelangt. Dazu ist zunächst zu bemerken, daß in (2.25) und (2.26) zwar die Abkürzungen  $\hat{p}$  aus (2.3),  $\hat{n}$  aus (2.7),  $p, n, \nu, s, \gamma$  und  $\beta$  aus (2.27) erklärt sind, nicht jedoch  $m, \Gamma, \phi$  und  $\lambda$ . Die Größen  $R, U, \varrho$  und  $M$  sind abhängige Unbekannte des Systems (2.25), die im Moment keine physikalische Bedeutung haben. Um eine mathematische Anfangswertaufgabe formulieren zu können, benötigt man (neben den Definitionen von  $m, \Gamma, \phi$  und  $\lambda$ ) noch eine Anfangsfläche<sup>9</sup>

$$\Sigma := \{(t, r) \in \mathbb{R}^2; t = t_0(r), r \in [0, r_b]\}, \quad (2.29)$$

die also durch eine gegebene  $C^2$ -Funktion  $t_0$  parametrisiert wird, sowie Vorgabefunktionen  $(R_\Sigma, M_\Sigma, \varrho_\Sigma, U_\Sigma)$ , deren Werte eine Lösung  $(R, M, S, \varrho)$  von (2.25) auf der Anfangsfläche  $\Sigma$  annehmen soll. Dabei dürfen diese Anfangswertfunktionen nicht frei vorgegeben werden, denn eine auf  $\Sigma$  diese annehmende Lösung muß die Zwangsbedingungen (2.26) erfüllen<sup>10</sup>. Wie dabei diese Bedingungen an  $(R_\Sigma, M_\Sigma, \varrho_\Sigma, U_\Sigma)$  konkret aussehen, steht in (2.31) und (2.32) und beruht auf den folgenden Definitionen von  $\Gamma, \phi$  und  $\lambda$ .

---

<sup>9</sup>dies kann entweder eine raumartige Anfangsfläche  $\Sigma = S$  mit etwa  $t_0 \equiv 0$  oder eine lichtartige Anfangsfläche  $\Sigma = H$  mit der Parametrisierung  $t_0 = B'_H$  für  $B_H$  aus (2.8) von Seite 21 sein

<sup>10</sup>Darüber hinaus sind gewisse physikalische Bedingungen einzuhalten, etwa  $\varrho_\Sigma > \varrho_b$ ,  $R_\Sigma(0) = 0$  etc.

2. *Ein Existenzsatz aus der allg.-relativist. Hydrodynamik*

---

1. Führe die Abkürzung  $\Gamma := \sqrt{M + U^2}$  ein.
2. Zu wählen ist weiter eine streng wachsende  $C^3$ -Funktion  $A_\Sigma : [0, r_b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ , die in 0 genau mit 3. Ordnung gegen Null gehe. Inhaltlich verbindet dies die willkürliche Raumkoordinatenwahl mit etwa der Anzahl der in die Sphäre mit Bezeichnung  $r$  eingeschlossenen Baryonen  $A_\Sigma(r)$ , indem man  $A_\Sigma = A(0, \cdot)$  setzt.
3. Definiere dann die Funktionen  $\phi$  und  $\lambda$  durch

$$\phi := \hat{\phi} \circ \varrho \quad \text{und} \quad \lambda(t, r) := 2 \ln \frac{A'_\Sigma(r)}{4\pi(nR^2)(t, r)}. \quad (2.30)$$

Wegen  $n = \hat{n} \circ \varrho > 0$  für  $\varrho > \varrho_b$ , was sich in der Nähe entsprechender Anfangsdaten stets erreichen läßt, und weil  $R^2$  und  $A'_\Sigma > 0$  für  $r \rightarrow 0$  mit gleicher Ordnung gegen 0 gehen, ist der Logarithmus zumindest in einer Umgebung geeigneter Anfangsdaten wohldefiniert und endlich.

4. Es soll später  $m$  so definiert werden, daß  $m(\cdot, 0) = 0$ ,  $\partial_t m = v_t$  und  $\partial_r m = v_r$  für  $v_t$  und  $v_r$  aus (2.28) gelten. Damit ein so definiertes Skalarfeld wohldefiniert ist, wird man für eine Lösung  $(R, M, S, \varrho)$  von (2.25) zeigen müssen, daß  $\partial_t v_r = \partial_r v_t$  gilt. Zunächst genügt es aber,  $m$  auf der Anfangsfläche  $\Sigma$  zu kennen.

**Lemma 2.3.4** *Sei  $\Sigma$  eine Anfangsfläche wie in (2.29). Jede dort die Anfangswerte  $(R_\Sigma, M_\Sigma, \varrho_\Sigma, U_\Sigma)$  annehmende Lösung  $(R, M, \varrho, U)$  der Zeitentwicklungsgleichungen (2.25) erfüllt auf der Anfangsfläche  $\Sigma$  die Zwangsbedingungen (2.26) für  $m_\Sigma(r)$  anstelle von  $m(t_0(r), r)$ , wenn die Anfangswerte*

$$R'_\Sigma - t'_0 e^{(\hat{\phi} \circ \varrho_\Sigma)} U_\Sigma = e^{\lambda_\Sigma/2} \Gamma_\Sigma \quad (2.31)$$

und

$$M_\Sigma - 1 + \frac{2m_\Sigma}{R_\Sigma} \equiv 0 \quad (2.32)$$

erfüllen, wobei  $\lambda_\Sigma := 2 \ln \frac{A'_\Sigma}{4\pi(\hat{n} \circ \varrho_\Sigma)R_\Sigma^2}$ ,  $\Gamma_\Sigma := \sqrt{M_\Sigma + U_\Sigma^2}$  seien und  $m_\Sigma(r)$  durch

$$\int_0^r \left( 4\pi \left[ t'_0 \left( -(\hat{p} \circ \varrho_\Sigma) e^{(\hat{\phi} \circ \varrho_\Sigma)} U_\Sigma \right) + \varrho_\Sigma e^{\lambda/2} \Gamma_\Sigma \right] R_\Sigma^2 \right) (x) \, dx \quad (2.33)$$

definiert sei.

Falls die Lösung  $(R, M, \varrho, U)$  außerdem  $\partial_t v_r = \partial_r v_t$  für  $v_t$  und  $v_r$  aus (2.28) erfüllt, wird durch  $m(\cdot, 0) = 0$ ,  $\partial_t m = v_t$  und  $\partial_r m = v_r$  ein Skalarfeld  $m$  definiert, daß zu  $m_\Sigma$  paßt: Es gelten für alle  $X \in \{R, M, \varrho, U, \lambda, \Gamma, m\}$

$$X(t_0(r), r) = X_\Sigma(r) \text{ für alle } r \in [0, r_b].$$

Der erste Teil des Lemmas wurde so formuliert, daß die Bedingungen nur an die Vorgabefunktionen  $(R_\Sigma, M_\Sigma, \varrho_\Sigma, U_\Sigma)$  gestellt werden. Der zweite Teil zeigt, daß die Definitionen von  $\lambda_\Sigma, \Gamma_\Sigma$  und  $m_\Sigma$  sinnvoll waren und daß die Substitution von  $m$  durch  $m_\Sigma$  in der Behauptung zur zweiten Zwangsbedingung aus (2.26) unschädlich war.

Der **Beweis** steht auf Seite 186 im Anhang.

**Folgerung 2.3.5** *Im Sinne von Definition 2.4.6 auf Seite 54 zulässige Anfangsdaten  $(R_H, M_H, \varrho_H, U_H)$  führen zu einer Lösung der Zeitentwicklungsgleichungen (2.25), die auf der Anfangsfläche  $H = \{(B_H(r), r); r \in [0, r_b]\}$  die Zwangsbedingungen (2.26) erfüllt, wobei  $B_H(x) := \int_0^x e^{-\hat{\phi}(\varrho_H(y))} dy$  die in (2.8) auf Seite 21 eingeführte Hilfsfunktion ist und  $\lambda$  in (2.30) durch  $A_H$  aus (2.8) anstelle von  $A_\Sigma$  definiert wird.*

Der **Beweis** steht auf Seite 187 im Anhang.

Um tatsächlich zu solchen zulässigen Anfangsdaten zu gelangen, kann man nur zwei der Anfangsfunktionen, etwa  $R_\Sigma$  und  $\varrho_\Sigma$  frei vorgeben. Die übrigen beiden Anfangsfunktionen werden dann durch (2.26) bestimmt (siehe Abschnitt 2.4.4).

Jetzt kann der Weg von einem mathematisch beschriebenen Differentialgleichungssystem (2.25) mit geeigneten Anfangsfunktionen, die zur Gültigkeit der Zwangsbedingungen (2.26) auf  $\Sigma$  führen, zu einer Raumzeit fortgesetzt werden.

5. Wenn eine Lösung  $(R, M, \varrho, U)$  von (2.25) gefunden ist, die auf  $\Sigma$  Anfangsdaten  $(R_\Sigma, M_\Sigma, \varrho_\Sigma, U_\Sigma)$  annimmt, welche den Voraussetzungen von Lemma 2.3.4 genügen, so gilt die erste Zwangsbedingung aus (2.26) auf

$$G^\perp := \{(t, r) \in G; [t_0(r), t] \times \{r\} \subset G\}, \quad (2.34)$$

wie in Lemma 6.1.2 im Anhang auf Seite 183 bewiesen wird.

6. Dann läßt sich auch  $\partial_t v_r = \partial_r v_t$  zeigen, so daß ein Skalarfeld  $m$  durch  $m(\cdot, 0) = 0$  und (2.28) überall auf  $G^\perp$  wohldefiniert ist (siehe Lemma 6.1.2).
7. Im Lösungsgebiet gilt dann auch die zweite Zwangsbedingung aus (2.26) gemäß Lemma 6.1.3 von Seite 183

In der relativistischen Terminologie sagt man dazu, daß das System (2.25) die **Zwangsbedingung** (2.26) **propagiert**.

Es wurde jetzt gezeigt, wie man ausgehend von dem quasilinearen Gleichungssystem (2.25) und den Zwangsbedingungen (2.26) über die Schritte 1. bis 7. zu einer mathematischen Formulierung einer Anfangswertaufgabe gelangt. Wie deren Lösung eine Raumzeit zu definieren ermöglicht, zeigt das folgende Lemma.

**Lemma 2.3.6** *Sei  $G$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit  $\Sigma \in G$ , wobei  $\Sigma$  mit  $t_0 \in C^2$  wie in (2.29) definiert sei. Seien Funktionen  $(R, M) \in C^2(G)$  und  $(\varrho, U) \in C^1(G)$  so gegeben, daß (2.25) auf  $G$  und (2.26) auf  $\Sigma$  gelten, wobei wie in der Aufzählung ab Seite 29 beschrieben, die Größen  $\Gamma, \phi,$*

$A_\Sigma$  und  $\lambda$  definiert seien. Dann wird auf  $G^\perp$  aus (2.34) durch (2.23) und  $u^a \partial_{x^a} = e^{-\phi} \partial_t$  eine kugelsymmetrische Raumzeit aus idealer Flüssigkeit  $(ds^2, u^a \partial_{x^a}, \rho)$  beschrieben.

Das System enthält keine Koordinatenfreiheit mehr. Diese wurde nämlich durch Definition von  $\phi$  und  $\lambda$  aufgegeben.

Der **Beweis** steht im Anhang ab Seite 187.

### 2.3.3 Das System in $(t^*, r^*)$ -Koordinaten

Nun sollen das Differentialgleichungssystem (2.25) und auch die Zwangsbedingungen (2.26) in den auf Seite 22 eingeführten  $(t^*, r^*)$ -Koordinaten ausgedrückt werden. Dazu wird die Koordinatentransformation (2.16) benutzt. In Lemma 2.3.7 wird die Transformation durchgeführt, wobei eine Bedingung an die Unbekannten gestellt wird. Diese Bedingung bedeutet physikalisch, daß die Schallgeschwindigkeit kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist. Für zulässige Anfangsdaten ist dies in der Nähe der Anfangsfläche erfüllt, wie als Lemma 2.3.8 bewiesen wird.

Mit  $\mathbf{u} = (\hat{u}, \tilde{u})$ ,  $\hat{u} = (R, M)$  und  $\tilde{u} = (\rho, U)$  lautet das quasilineare Differentialgleichungssystem (2.25) in  $(t, r)$ -Koordinaten

$$\begin{aligned} \partial_t \begin{bmatrix} R \\ M \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ -2\nu \end{bmatrix} e^{\phi U} \\ \partial_t \tilde{u} + \mathbf{A}(\mathbf{u}) \partial_r \tilde{u} &= \mathbf{b}(\mathbf{u}), \end{aligned} \quad (2.35)$$

mit

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) := \beta \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ 1/\gamma & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b}(\mathbf{u}) := \beta \begin{bmatrix} -(p + \rho) \frac{2U}{R} \\ \nu \end{bmatrix} e^{\phi}.$$

Bildet man aus den Eigenwerten von  $\mathbf{A}$  die Diagonalmatrix

$$\mathbf{\Lambda}(\mathbf{u}) := \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

und schreibt man die Links-Eigenvektoren von  $\mathbf{A}(\mathbf{u})$  in die Zeilen der Matrix

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}) := \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ -1 & \gamma \end{bmatrix},$$

so gilt  $\mathbf{\Lambda S} = \mathbf{S A}$ . Dabei sind die Unbekannten  $\mathbf{u}$  in den Abkürzungen  $\beta$  und  $\gamma$  aus (2.27) auf Seite 28 enthalten.

**Lemma 2.3.7** *Sei  $1 \pm \beta B'_H(r) > 0$ . Durch die Koordinatentransformation (2.16) geht dann das System (2.35) in das System*

$$\begin{aligned} \partial_{t^*} \begin{bmatrix} R \\ M \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ -2\nu \end{bmatrix} e^{\phi U} & (2.36) \\ \partial_{t^*} \hat{u} + \mathbf{T}^*(\mathbf{u}) \mathbf{A}(\mathbf{u}) \partial_{r^*} \hat{u} &= \mathbf{T}^*(\mathbf{u}) \mathbf{b}(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

über, wobei  $\mathbf{T}^* = \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{E} - B'_H(r) \mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{S}$  mit Einheitsmatrix  $\mathbf{E}$  sei.

**Beweis** Multipliziert man die untere Gleichung aus (2.35) von links mit  $\mathbf{S}$  und ersetzt die Differentialoperatoren durch die rechte Seite von  $\partial_t = \partial_{t^*}$  bzw.  $\partial_r = -B'_H(r) \partial_{t^*} + \partial_{r^*}$ , so erhält man wegen  $\mathbf{\Lambda S} = \mathbf{S A}$

$$[\mathbf{S} - \mathbf{\Lambda S} B'_H(r)] \partial_{t^*} \hat{u} + \mathbf{S A} \partial_{r^*} \hat{u} = \mathbf{S b}(\mathbf{u}),$$

Multiplikation von links mit den Inversen von  $\mathbf{E} - B'_H(r) \mathbf{\Lambda}$  und  $\mathbf{S}$  liefert die Behauptung.  $\square$

Durch die erste Voraussetzung wird garantiert, daß die Matrix  $\mathbf{E} - B'_H(r)\mathbf{\Lambda}$  invertiert werden kann. Dies zu erfüllen gelingt zum Beispiel in der in Lemma 2.2.1 beschriebenen Situation.

**Lemma 2.3.8** *Für zulässige Daten gilt auf  $H$  (und deshalb ebenfalls in einer hinreichend kleinen Umgebung davon)*

$$1 \pm \beta B'_H(r) > 0 \quad . \quad (2.37)$$

**Beweis** Auf  $H$  gilt  $\beta = e^{\phi - \lambda/2} s = e^\phi s$ , weil dort  $\lambda$  verschwindet (siehe hinter (2.13)). Wegen  $B'_H = e^{-\hat{\phi} \circ \varrho_H}$  lautet (2.37) auf  $H$  einfach  $1 \pm s > 0$ , d.h. (2.37) ergibt sich durch die Wahl einer Zustandsgleichung mit (2.2), bei der also die Schallgeschwindigkeit kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist.  $\square$

Explizit lautet also das transformierte System

$$\begin{aligned} \partial_{t^*} R &= e^\phi U \\ \partial_{t^*} M &= -2e^\phi U \nu \\ \partial_{t^*} \varrho &= -\alpha \beta [\beta B'_H(r) \partial_{r^*} \varrho + \gamma \partial_{r^*} U] \\ &\quad + \alpha \left[ -(p + \varrho) \frac{2U}{R} + \beta B'_H(r) \gamma \nu \right] e^\phi \\ \partial_{t^*} U &= -\alpha \beta \left[ \frac{1}{q} \partial_{r^*} \varrho + \beta B'_H(r) \partial_{r^*} U \right] \\ &\quad + \alpha \left[ -\beta B'_H(r) \Gamma s \frac{2U}{R} + \nu \right] e^\phi, \end{aligned} \quad (2.38)$$

wobei  $\alpha := \left[ 1 + (\beta B'_H(r))^2 \right]^{-1}$  sei.

Zu diesem System gehören die transformierten Zwangsbedingungen

$$\partial_{r^*} R \equiv e^{\lambda/2} \Gamma - U \quad (2.39)$$

und

$$M - 1 + \frac{2m}{R} \equiv 0 \quad (2.40)$$

mit  $m$  wie hinter (2.26) definiert.

Das System (2.38) unterscheidet sich von dem viel komplexeren System aus der Veröffentlichung [AIMH94, (17) bis (20)] darin, daß anstelle von  $\Gamma$  die Größe  $M$  zur Grundunbekannten gemacht wurde, was also eine lohnende Vereinfachung war. In dieser Struktur wird das Gleichungssystem allerdings nicht bearbeitet, sondern es wird in Abschnitt 4.4.4 das System in diagonalen Gestalt aufgeschrieben, was u.a. die Übersicht bei der Datenvorgabe und den Existenzbeweis vereinfacht.

## 2.4 Konstruktion einer Raumzeit mit Schwarzen Loch

Wie schon in der Einleitung auf Seite 17 angedeutet, soll nun eine Raumzeit  $V_1$  konstruiert werden, die aus Daten auf einer Datenfläche  $H$  bestimmt ist, welche sich als Ereignishorizont entpuppt (Schritt I aus Abschnitt 1.2.2 auf Seite 9). Diese Konstruktion geschieht in zwei Bereichen, nämlich zum einen in der Nähe des Zentrums der Kugelsymmetrie und dann zum anderen außerhalb des Zentrums in einer Umgebung des Sternrandes.

Zunächst werden die Einsteingleichungen für eine Raumzeit aus idealer Flüssigkeit (2.4) in Koordinaten gelöst, die im Gegensatz zu den  $(t, r)$ -Koordinaten<sup>11</sup> und den  $(t^*, r^*)$ -Koordinaten *regulär im Zentrum* der Kugelsymmetrie sind. Dazu werden Daten auf einer raumartigen Hilfsfläche  $F$  vorgegeben, aus denen sich eine kugelsymmetrische Raumzeit aus idealer Flüssigkeit  $V_F$  (siehe Lemma 2.4.1) entwickelt, die im Zentrum regulär ist. Die Bezeichnungen werden in Abbildung 2.1 auf Seite 16 veranschaulicht.

Außerhalb des Zentrums wird dann eine weitere Raumzeit

---

<sup>11</sup>Die Gleichungen (2.25) auf Seite 28 sind in  $r = 0$  singular.



## 2.4 Konstruktion einer Raumzeit mit Schwarzem Loch

---

aus idealer Flüssigkeit  $V_H$  als Lösung der Gleichungen (2.25) so gewonnen, daß  $V_1 := [V_F \cup V_H]$  eine reguläre Fortsetzung von  $V_F$  ist (siehe Satz 2.4.3). Die Raumzeit  $V_H$  ist dabei durch Daten auf der Hyperfläche  $H$  bestimmt, welche sich als *Ereignishorizont* der Raumzeit herausstellt. An  $V_1$  wird schließlich eine eindeutig bestimmte Vakuum-Raumzeit  $V_0$  angeschlossen. Dadurch ergibt sich eine Raumzeit aus idealer Flüssigkeit, die ein Schwarzes Loch enthält.

### 2.4.1 Materie-Raumzeit in Zentrums-Nähe

**Lemma 2.4.1** *Sei  $F$  eine glatte 3D-Mannigfaltigkeit. Seien Datenfunktionen  $\varrho_F$  und  $U_F$  aus  $C^\infty([0, \tilde{r}_0], \mathbb{R})$  für ein  $\tilde{r}_0 > 0$  so gegeben, daß die Bedingungen<sup>12</sup>*

$$\left[ \left( \frac{d}{d\tilde{r}} \right)^{2n+1} \varrho_F \right]_{\tilde{r}=0} = 0, \quad \left[ \left( \frac{d}{d\tilde{r}} \right)^{2n} U_F \right]_{\tilde{r}=0} = 0 \quad (2.41)$$

für  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,

$$\left[ \frac{dU_F}{d\tilde{r}} \right]_{\tilde{r}=0} < 0 \quad (2.42)$$

und

$$\frac{8\pi}{\tilde{r}} \left( \int_0^{\tilde{r}} \varrho_F(x) x^2 dx \right) < 1 + (U_F(\tilde{r}))^2 \quad \text{für } \tilde{r} \in [0, \tilde{r}_0] \quad (2.43)$$

gelten.

*Es existiert dann eine eindeutige kugelsymmetrische  $C^\infty$ -Lösung  $(ds^2, \varrho, u^a)$  der Einsteinschen Feldgleichungen für ideale Flüssigkeit auf einer 4D-Mannigfaltigkeit  $D_F$  derart, daß die obigen Daten angenommen werden*

$$\varrho = \varrho_F \quad \text{und} \quad U = U_F \quad \text{auf } F,$$

*wobei jetzt  $(\tilde{t}, \tilde{r})$ -Koordinaten mit  $ds^2$  vom Typ (2.15) gewählt werden, die durch  $F = [\tilde{t} = 0]$  und  $R(0, \tilde{r}) = \tilde{r}$  für  $\tilde{r} \in [0, \tilde{r}_0]$  fixiert seien.*

*Ferner ist  $F \subset D_F$  raumartig. Außerdem existiert eine Umgebung  $V_F \subset D_F$  des Zentrums  $O$  so, daß*

$$(D_t + D_r)(\Gamma + U) + 4\pi\varrho R < 0 \quad \text{auf } V_F \quad (2.44)$$

---

<sup>12</sup>Dadurch werden die Größen  $\varrho_F$  und  $U_F$  Skalarfelder auf  $F$ , sobald geeignete Koordinaten gewählt sind.

---

## 2.4 Konstruktion einer Raumzeit mit Schwarzem Loch

---

gilt und  $V_F$  geeignet geformt ist, nämlich so, daß der rechte Rand von Schallcharakteristiken so gebildet wird, daß deren Schnittpunkt  $P$  auf dem Lichtkegel liegt (vgl. Abbildung 2.1 auf Seite 16).

Versieht man die Raumzeit  $V_F$  mit den  $(t^*, r^*)$ -Koordinaten aus Lemma 2.2.1, so sei der Punkt  $P$  durch  $(t^*, r^*) = (0, \varepsilon)$  gekennzeichnet. Für dieses so definierte  $\varepsilon \in ]0, \frac{1}{4}[$  gelte<sup>13</sup>  $12\varepsilon < r_b$ , wobei  $[r^* = r_b]$  der Sternrand  $B$  sei. Außerdem sei der Betrag der linken Seite von (2.44) kleiner als  $\frac{1}{16\varepsilon}$ .

Die Bedingungen in (2.41) sind hinreichende und notwendige Bedingungen für  $C^\infty$ -Regularität im Zentrum  $O \in F$ . Sofern nicht auf ein spezielles Koordinatensystem Bezug genommen wird, ist unter  $C^\infty$ - bzw.  $C^k$ -Regularität diese Eigenschaft bzgl. eines beliebigen zulässigen Koordinatensystems zu verstehen. (Die Polarkoordinaten  $(\tilde{t}, \tilde{r})$  sind nicht zulässig.) In der unzulässigen Koordinate  $\tilde{r}$  sind  $[R]_F$  und  $U_F$  zwar beliebig oft differenzierbar, in zulässigen Koordinaten dagegen sind  $[R]_F$  und  $U_F$  im Zentrum nicht einmal stetig differenzierbar. Allerdings sind  $[R^2]_F$ ,  $[R]_F U_F$ ,  $ds^2$  und  $\varrho_F$  alle  $C^\infty$  (bezüglich zulässiger Koordinaten) unter den Voraussetzungen des Lemmas, weil diese Funktionen sich regulär in  $g_{\alpha\beta}^F$  und  $K_{\alpha\beta}^F$  ausdrücken lassen. Die Regularität dieser inneren Metrik und der äußeren Krümmung wird im folgenden Beweis gezeigt.

**Beweis von Lemma 2.4.1** Die Bedingungen an die Datenfunktionen (2.41) bis (2.43) wurden in  $(\tilde{t}, \tilde{r})$ -Koordinaten formuliert. Um die Einstein-Gleichungen zu lösen, verwendet man nun Koordinaten, die im Gegensatz zu diesen Polarkoordinaten regulär sind auch im Zentrum der Kugelsymmetrie.

Dann haben die Gleichungen (2.4) zeitlich lokal eine kugelsymmetrische  $C^\infty$ -Lösung für das Cauchy-Problem, sofern die Cauchy-Daten  $C^\infty$  und kugelsymmetrisch sind. Dies wurde

---

<sup>13</sup>Gegebenenfalls möge  $V_F$  entsprechend verkleinert werden, was die übrigen Aussagen des Satzes nicht tangiert

z.B. in [Kind91] unter Bezugnahme auf [Rend92] festgestellt. Die vorzugebenden Cauchy-Daten sind dabei die innere Metrik  $g_{\alpha\beta}^F$  von  $F$  ( $\alpha$  und  $\beta$  laufen von 1 bis 3) und die äußere Krümmung  $K_{\alpha\beta}^F$  von  $F$ . Diese werden aus den Datenfunktionen  $\varrho_F$  und  $U_F$  wie folgt ermittelt

$$g_{\alpha\beta}^F = \frac{E(\tilde{r}) - 1}{\tilde{r}^2} x_\alpha x_\beta + \delta_{\alpha\beta}$$

und

$$K_{\alpha\beta}^F = \left( \frac{E(\tilde{r})U_F'(r)}{\tilde{r}^2} - \frac{U_F(r)}{\tilde{r}^3} \right) x_\alpha x_\beta - \frac{U_F}{\tilde{r}} \delta_{\alpha\beta}$$

mit

$$E(\tilde{r}) := g_{\tilde{r}\tilde{r}}(0, \tilde{r}) = \left( U_F(r)^2 + \frac{8\pi}{\tilde{r}} \int_0^{\tilde{r}} \varrho_F(x) x^2 dx + 1 \right)^{-1},$$

wobei hier die Metrik (2.15), fixiert durch  $F = [\tilde{t} = 0]$  und  $R(0, \tilde{r}) = \tilde{r}$ , mit den Koordinaten

$$x_1 = \tilde{r} \cos \varphi \sin \vartheta, \quad x_2 = \tilde{r} \sin \varphi \sin \vartheta \quad \text{und} \quad x_3 = \tilde{r} \cos \vartheta$$

verwandt werden.

Die Notwendigkeit der Bedingungen (2.41) bis (2.43) wurde in [Kind92] begründet. Daß sie auch hinreichend sind für  $C^\infty$ -Regularität im Zentrum ergibt sich aus den Lemmata 6.2.1 bis 6.2.3, die im Anhang ab Seite 189 zu finden sind, in folgender Weise. Zunächst gelten  $\tilde{r} \mapsto \frac{8\pi}{\tilde{r}} \int_0^{\tilde{r}} \varrho_F(x) x^2 dx \in C^\infty$ ,  $\tilde{r} \mapsto \frac{U_F(\tilde{r})}{\tilde{r}} \in C^\infty$  und  $\tilde{r} \mapsto \frac{h(\tilde{r})}{\tilde{r}} \in C^\infty$  für

$$h(\tilde{r}) := E(\tilde{r})U_F'(\tilde{r})\tilde{r} - U_F(\tilde{r}),$$

da  $U_F(0) = h(0) = h'(0) = h''(0) = 0$  gilt. Das zeigt die  $C^\infty$ -Regularität von  $K_{\alpha\beta}^F$ . Für die  $C^\infty$ -Regularität von  $g_{\alpha\beta}^F$  genügt es wegen

$$\frac{E(\tilde{r}) - 1}{\tilde{r}^2} = \frac{1}{\tilde{r}^2} \left\{ \frac{1}{1 + h(\tilde{r})} - 1 \right\} = \frac{1}{\tilde{r}^2} \left\{ \frac{-h(\tilde{r})}{1 + h(\tilde{r})} \right\}$$

## 2.4 Konstruktion einer Raumzeit mit Schwarzem Loch

---

für

$$h(\tilde{r}) := U_F(\tilde{r})^2 + \frac{8\pi}{\tilde{r}} \int_0^{\tilde{r}} \varrho_F(x) x^2 dx$$

die Regularität von  $\frac{h(\tilde{r})}{\tilde{r}^2}$  zu zeigen, da der Nenner wegen (2.43) nicht verschwindet. Diese folgt aber wegen  $h(0) = h'(0) = 0$  aus Lemma 6.2.2.

Die Aussage (2.44) ergibt sich aus (2.42) und dem folgenden Lemma, welches insbesondere

$$\begin{aligned} \lim_{\tilde{r} \rightarrow 0} [(D_t + D_r)(\Gamma + U) + 4\pi \varrho R]_{\tilde{t}=0} &= \lim_{\tilde{r} \rightarrow 0} [D_r U]_{\tilde{t}=0} \\ &= \lim_{\tilde{r} \rightarrow 0} [\partial_{\tilde{r}} U]_{\tilde{t}=0} \end{aligned}$$

besagt. □

Das folgende Lemma wird insbesondere für die Raumzeit  $V_F$  benötigt.

**Lemma 2.4.2** *Sei  $V_2$  eine kugelsymmetrische  $C^\infty$ -Raumzeit aus idealer Flüssigkeit mit regulärer Zentrallinie. Dann ist*

$$\Sigma := \{(t, r, \varphi_0, \vartheta_0); r \in [0, r_b], t \in [-T, T]\}$$

eine 2D-Untermannigfaltigkeit von  $V_2$ , die als Rand  $[r = 0]$  die Zentrallinie  $C$  enthält, wobei  $\varphi_0, \vartheta_0$  beliebige und  $r_0, T$  hinreichend kleine positive Konstanten seien. Dann gelten

$$\varrho \in C^2(\Sigma), \quad R, \Gamma, U \in C^0(\Sigma), \quad D_t \varrho, D_r \varrho, \frac{D_r U}{r} \in C^1(\Sigma),$$

$$R = U = 0 \quad \text{und} \quad \Gamma = 1 \quad \text{auf } C.$$

Für  $X := (\lambda, \partial_{r^*} R, m/R^2, D_r \Gamma)$  gilt

$$\lim_{\tilde{r} \rightarrow 0} [X(\tilde{t}, \tilde{r})]_{\tilde{t}=0} = (0, 1, 0, 0)$$

und für  $Y := (D_t U, D_r U, D_t \Gamma, D_r \Gamma)$  gilt

$$\lim_{r^* \rightarrow 0} [Y(t^*, r^*)]_{t^*=0} = \lim_{\tilde{r} \rightarrow 0} [Y(\tilde{t}, \tilde{r})]_{\tilde{t}=0} \quad ,$$

2. *Ein Existenzsatz aus der allg.-relativist. Hydrodynamik*

---

wobei der Limes links (bzw. rechts) vom Gleichheitszeichen in den  $(t^*, r^*)$ -Koordinaten aus Lemma 2.2.1 (bzw. in den  $(\tilde{t}, \tilde{r})$ -Koordinaten aus Lemma 2.4.1) zu lesen sind. Schließlich existiert  $\lim_{r^* \rightarrow 0} [\partial_{r^*} \partial_{r^*} R(t, r)]_{t^*=0}$  .

**Beweis** Die Aussagen zur Differenzierbarkeit folgen aus den Voraussetzungen, die zu den Werten auf  $C$  in [Hern66] stehen. Die Grenzwerte lassen sich mit der Regel von l'Hospital ermitteln, wobei die Aussage über  $Y$  aus  $(\partial_t U, \partial_t \Gamma)(0, 0) = (0, 0)$  folgt. Um die Existenz des Limes von  $\partial_{r^*} \partial_{r^*} R(t, r)$  zu zeigen, bemerkt man, daß Lemma 2.3.3 anwendbar ist und somit (2.26) gilt. Mit (2.16) folgt dann

$$\begin{aligned} \partial_{r^*} \partial_{r^*} R &= (e^{-\phi} \partial_t + \partial_r) (e^{-\phi} \partial_t + \partial_r) R \\ &= (e^{-\phi} \partial_t + \partial_r) (U + e^{\lambda/2} \Gamma) \\ &= (D_t + D_r) (U + \Gamma), \end{aligned}$$

wobei zuletzt  $\lambda|_H \equiv 0$  benutzt wurde. □

### 2.4.2 Flüssigkeits-Raumzeit in einer Sternrandumgebung

Im folgenden Satz 2.4.3 geht es um eine Anfangsrandwertaufgabe für die unabhängigen Unbekannten  $(\varrho, R, U, M)$ , denen auf der Anfangsfläche  $H = [t^* = 0]$  die Anfangswerte  $(\varrho_H, R_H, U_H, M_H)$  und auf dem Sternrand  $[r = r_b]$  der konstante Randwert  $\varrho = \varrho_b$  vorgeschrieben werden. Dadurch verschwindet dort der Druck  $p = \hat{p}(\varrho_b)$  gemäß (2.3) von Seite 19, so daß dort eine Vakuum-Raumzeit angeschlossen werden kann. Die zu lösenden Evolutionsgleichungen (2.38) stehen auf Seite 35 in diagonalen Form.

Im Satz wird vorausgesetzt, daß die wesentlichen Anfangsdaten  $(\varrho_H, R_H)$ , welche auf einer lichtartigen Anfangsfläche  $H$  die Massenenergiedichte  $\varrho$  und  $R$  als Krümmungsradius der Symmetrie-Sphären vorschreiben, folgende **physikalische Bedingungen** erfüllen:

- nicht-negativer Druck  $p$ , der im Sternrand verschwindet
- Geschwindigkeit  $U = D_t R$  negativ, so daß es zum Kollaps kommt
- Lichtflucht möglich, d.h.  $R'_H > 0$  auf  $H \setminus [\text{Sternrand}]$
- Schwarzes-Loch-Bedingung, die  $H$  schließlich zu einem Ereignishorizont macht
- Eckbedingung im Sternrand, wo wegen des konstanten Randwerts  $\varrho = \varrho_b$  von den Anfangsdaten verlangt werden soll, daß die rechte Seite der  $\varrho$ -Evo verschwindet.
- Regularität im Zentrum der Kugelsymmetrie

Diese Bedingungen werden formal definiert auf Seite 56 als  $(\varrho_H, R_H)$ -Bedingungen (2.59) bis (2.65). Sie werden an die wesentlichen Anfangsdatenfunktionen  $(\varrho_H, R_H)$  gestellt, weil die

übrigen zwei Vorgabefunktionen aus diesen durch die Zwangsbedingungen (2.39,2.40) von Seite 35 bestimmt werden können. Die Geschwindigkeit  $U_H$  wird dazu in (2.55) auf Seite 55 durch  $U_H := \mathcal{U}(\varrho_H, R_H)$ , also mit Hilfe eines Funktionals in  $(\varrho_H, R_H)$  so definiert, daß zunächst einmal die zweite Zwangsbedingung gilt. Durch  $M_H := R'_H (R'_H - 2U_H)$  kann dann die letzte Vorgabefunktion so definiert werden, daß auch die andere Zwangsbedingung erfüllt ist.

**Satz 2.4.3** *Sei  $V_F$  eine Raumzeit wie in Lemma 2.4.1. Sei  $H_F$  der Zukunftslichtkegel des Zentrums  $O \in F^{14}$ . Sei die Hyperfläche  $H$  eine hinreichend glatte Fortsetzung von  $H_F$ . Gegeben seien ferner die wesentlichen Daten*

$$\varrho_H, R_H \text{ auf } H \quad (2.45)$$

und

$$\varrho_b \text{ aus (2.3) auf dem Sternrand } B, \quad (2.46)$$

wobei die Datenfunktionen  $(\varrho_H, R_H) \in C^4(H \setminus O)$  solche Fortsetzungen von  $[(\varrho, R) \text{ der Raumzeit } V_F]_{|H_F}$  seien, welche die oben genannten

$$(\varrho_H, R_H)\text{-Bedingungen (2.59) bis (2.65)}$$

erfüllen. Aus diesen wesentlichen Daten  $(\varrho_H, R_H)$  werden die übrigen Datenfunktionen  $U_H$  und  $M_H$  mit (2.55) ermittelt. Diese sind dann aus  $C^2(H \setminus O)$ .

Sei  $N_0$  mit  $\overline{N_0} \subset V_F$  eine (beliebig kleine) Umgebung von  $O$ . Dann haben die Evolutionsgleichungen (2.38) mit den Zwangsbedingungen (2.39,2.40) genau eine Lösung  $(\varrho, R, U, M)$ , welche die obigen Daten (Anfangswerte)

$$(\varrho, R, U, M) = (\varrho_H, R_H, U_H, M_H) \text{ auf } H \setminus N_0 \quad (2.47)$$

---

<sup>14</sup>(siehe Abbildung 2.1 auf Seite 16)



und  $\varrho \equiv \varrho_b$  auf dem Sternrand  $B$  (Randwerte) annimmt. Diese Lösung definiert<sup>15</sup> eine Materie-Raumzeit aus idealer Flüssigkeit  $(ds^2, u^a, \varrho)$  in einer Umgebung  $V_H$  von  $H \setminus N_0$ , die links durch Schallcharakteristiken und rechts durch den Sternrand  $B$  begrenzt ist. Für diese Raumzeit gelten (2.9), (2.10) und (2.14) von Seite 22, wobei die Koordinaten durch (2.13)<sup>16</sup> festgelegt seien. Die Skalarfelder  $\varrho$  und  $U$  (bzw.  $R$  und  $M$ ) sind aus  $C_L^1(V_H)$  (bzw. aus  $C_L^2(V_H)$ ). Ferner ist  $H$  (bzw.  $B$ ) lichtartig (bzw. zeitartig).  $H$  kann zu einem Ereignishorizont fortgesetzt werden. Außerdem ist  $[V_F \cup V_H]$  eine Raumzeit aus idealer Flüssigkeit, die eine  $C^1$ -Fortsetzung von  $V_F$  ist.

### Bemerkungen zum Satz 2.4.3

- (i) Die Datenfläche  $H$  ist zwar lichtartig aber **nicht charakteristisch** für das partielle Differentialgleichungssystem (2.38) bzw. (2.25), da es keine Gravitationswellen gibt in kugelsymmetrischen Raumzeiten. Mathematisch ist in der (gemäß Abschnitt 4.4 äquivalenten) Form (4.33) auf Seite 115 zu erkennen, daß genau die Schallcharakteristiken und die Weltlinien der Materieteilchen  $[r = \text{const}]$  Informationen transportieren.
- (ii) Die  $(\varrho_H, R_H)$ -Bedingungen sind erfüllbar für eine große Datenmenge  $(\varrho_H, R_H)$ , wie Satz 2.4.10 zeigt. Diese Bedingungen bestehen aus mehreren **Ungleichungen** auf  $H$  und einigen Bedingungen im Punkt  $P_b$  aus Abbildung 2.1, darunter die **Schwarzes-Loch-Bedingung** (2.62). Insbesondere diese erschwert die Vorgabe von Anfangsdaten, die mit höherer Ordnung zu  $\varrho \equiv \varrho_b$  auf  $B$  passen. Deshalb

---

<sup>15</sup>Wende Lemma 2.3.6 an, nachdem die Umkehrung von Lemma 2.3.7 dessen Voraussetzung, eine Lösung von (2.25) mit (2.26) geliefert hat

<sup>16</sup>Das ist genau die Koordinatenfixierung, die auch in der Aufzählung auf Seite 29 beschrieben wurde mit  $A_\Sigma = [A_H$  aus (2.8)]

wird in Kapitel 3 großer Wert gelegt auf die sogenannten Eckbedingungen (siehe insbesondere Satz 4.4.1).

- (iii) In Satz 2.4.3 wurden  $(t^*, r^*)$ -Koordinaten benutzt, ausführlich ist also  $H = \{(t^*, r^*); t^* = 0, r^* \in [0, r_b]\}$  die Anfangsdatenfläche,  $B = \{(t^*, r^*); r^* = r_b\}$  der Sternrand, und etwa die  $\varrho$ -Bedingungen aus (2.47) lauten

$$\varrho(0, r^*) = \varrho_H(r^*), \dots, \varrho(t, r^*) \text{ für } r^* \in [\varepsilon, r_b],$$

wobei  $(t^*, r^*) = (0, \varepsilon)$  den Rand von  $N_0 \cap H$  beschreibt.

- (iv) Das bei (2.48) definierte  $m_H$  unterscheidet sich von der Restriktion auf  $H$  des in (2.26) benutzten Skalarfeldes nicht, weil die Anfangsdaten nach Lemma 2.4.9 von Seite 58 zulässig sind und Folgerung 2.3.5 auf Seite 31 für solche genau dies verspricht.

**Beweis von Satz 2.4.3** Die wichtigste Aussage des Satzes ist der Existenzsatz, der für im Sinne von Definition 2.4.6 zulässige Anfangsdatenfunktionen  $(\varrho_H, R_H)$  Existenz und Eindeutigkeit der Raumzeit  $V_H$  liefert. Dies läßt sich aus Satz 4.4.1 von Seite 122 mit Anfangsfläche **b**) und Eckbedingung **ii**) gewinnen, wobei das in (2.25) in  $\lambda$  enthaltene  $A_\Sigma$  durch  $A_H$  aus (2.8) wie in (2.30) zu bestimmen ist.

Zur Glattheit der Lösung bedarf  $R, M \in C^2(V_H)$  einer Begründung. Diese besteht darin, daß die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \partial_t R &= e^{\hat{\phi} \circ \varrho} U, \quad \partial_r R(t, r) = \frac{A'_H(r)}{4\pi(\hat{n} \circ \varrho R^2)(t, r)} (M + U^2) =: R_r(t, r) \\ \partial_t M &= -2e^{\hat{\phi} \circ \varrho} U \left( \frac{M-1}{2R} - 4\pi \hat{p} \circ \varrho R \right) \text{ und} \\ \partial_r M &= -8\pi \varrho R R_r - \frac{M-1}{R} R_r \end{aligned}$$

auf ganz  $V_H$  stetig differenzierbar sind (boot step argument).

Die anderen Aussagen über  $V_H$  folgen aus Lemma 2.2.1.

## 2.4 Konstruktion einer Raumzeit mit Schwarzem Loch

---

Es werden nun die Voraussetzungen von Satz 4.4.1 gezeigt. In Zentrumsnähe erfüllt  $u_\varepsilon$  die Zwangsbedingungen, weil  $V_F$  nach Lemma 2.4.1 eine Raumzeit liefert, welche die Gleichungen (2.25) und (2.26) gemäß Lemma 2.3.3 erfüllt. Nun sind für  $u_0 = (R_H, M_H, \varrho_H, U_H)$  die übrigen Voraussetzungen zu zeigen. Nach Wahl von  $A_\Sigma = A_H$  aus (2.8) gilt  $\lambda \equiv 0$  auf  $H$ . Mit (2.16) lauten daher die Zwangsbedingungen (2.26) auf  $H$

$$\partial_r R = R'_H - e^{-\hat{\phi} \circ \varrho_H} (\partial_t R)|_H = R'_H - U_H \equiv \Gamma_H$$

und

$$\Gamma^2 - U^2 - 1 + \frac{2m}{R} = (R'_H - U_H)^2 - U_H^2 - 1 + \frac{2m_H}{R_H} \equiv 0.$$

Diese ergeben sich aus (2.48), was durch die Definition von  $U_H, M_H$  in (2.55) für  $\Gamma_H := \sqrt{M_H + U_H^2}$  erfüllt ist, wie auf Seite 55 ausgeführt wird. Die Glattheit der Anfangsdatenfunktion  $U_H$  folgt aus Lemma 6.3.1 und (2.55). Die weiteren Bedingungen  $R_H > 0$ ,  $\Gamma_H > 0$ ,  $M_H > 0$  und  $\varrho_H > \varrho_b$  folgen aus (2.61) mit (2.65), (2.61) mit (2.60) und  $\Gamma_H = R'_H - U_H$ ,  $M_H = R'_H(R'_H - 2U_H) > 0$  nach (2.60, 2.61) und (2.59). Schließlich gilt die Eckbedingung **ii**), weil die  $(\varrho_H, R_H)$ -Bedingungen nach Lemma 2.4.9 die Bedingung (2.53) nach sich zieht. Die Randwertvorgabe (2.46) erfolgt ebenso in Satz 4.4.1, was dessen Voraussetzungen vollständig erfüllt sein läßt.

Zu zeigen bleibt noch die Eindeutigkeit in  $[V_F \cap V_H]$ , die sich wie folgt aus der Gestalt der Raumzeiten ergibt. Nach Konstruktion ist  $[V_F \cap V_H]$  das Abhängigkeitsgebiet für Anfangsdaten, die auf  $[H \cap V_F \cap V_H]$  gegeben werden. Dort herrscht also Eindeutigkeit für die Lösung, insbesondere sind also die sich aus  $[H \cap V_F \cap V_H]$  entwickelnde Raumzeit und die sich aus  $[F \cap V_F]$  entwickelnde Raumzeit auf  $[V_F \cap V_H]$  identisch.  $\square$

### 2.4.3 Konstruktion der finalen Schwarzes-Loch-Raumzeit

Die Konstruktion der finalen Raumzeit aus idealer Flüssigkeit mit einem schwarzen Loch erfolgt in zwei Schritten, die schon in Abschnitt 1.2.2 auf Seite 9 genannt wurden.

**Schritt I:** Konstruktion einer Hilfs-Raumzeit  $V$  in einer Umgebung einer lichtartigen Anfangsfläche  $H$ , die sich als Ereignishorizont herausstellt (Satz 2.4.4). Diese Hilfs-Raumzeit  $V$  wird aus drei Teil-Raumzeiten zusammengesetzt. Diese sind a) eine Materie-Raumzeit  $V_F$  in Zentrumsnähe<sup>17</sup>, b) eine Materie-Raumzeit  $V_H$  mit positivem Abstand vom Zentrum<sup>18</sup>, und c) eine eindeutig an den Sternrand anschließbare Vakuum-Raumzeit. Dabei entwickelt sich die Raumzeit  $V_F$  aus den wesentlichen Anfangsdaten  $(\varrho_F, U_F)$ , die frei vorgebar sind, als Lösung einer Anfangswertaufgabe. Die Raumzeit  $V_H$  entwickelt sich als Lösung einer Anfangsrandwertaufgabe<sup>19</sup> aus den wesentlichen Anfangsdaten  $(\varrho_H, R_H)$ , die frei vorgebar sind bis auf physikalische Bedingungen, die auf Seite 43 eingeführt und in Definition 2.4.7 auf Seite 56 als  $(\varrho_H, R_H)$ -Bedingungen formal definiert wurden.

**Schritt II:** Diese Hilfs-Raumzeit  $V$  induziert auf einer raumartigen Anfangsdatenfläche  $C$  (siehe Abbildung 2.2) reguläre und harmlose Anfangsdaten, aus denen sich innerhalb endlicher Eigenzeit ein schwarzes Loch entwickelt (Satz 2.4.5).

**Satz 2.4.4** *a) Seien  $(\varrho_F, U_F)$  Anfangsdatenfunktionen wie in Lemma 2.4.1. Aus der dortigen Hilfsfläche  $F$  entwickelt sich eine  $C^\infty$ -Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen für ideale Flüssigkeit, welche die Daten  $(\varrho_F, U_F)$  auf  $F$  annimmt. Man erhält insbesondere auf  $V_F$  eine Raumzeit, die eine Umgebung der Zentrallinie umfaßt.*

---

<sup>17</sup>siehe Abbildung 2.1 auf Seite 16

<sup>18</sup> $V_H$  ist ebenfalls in Abbildung 2.1 dargestellt

<sup>19</sup>Die Randwertbedingung ist  $\varrho \equiv \varrho_h$  auf dem Sternrand

---

## 2.4 Konstruktion einer Raumzeit mit Schwarzem Loch

- b) Seien die lichtartige Anfangsfläche  $H$  und Anfangsdaten-funktionen  $(\varrho_H, R_H)$  wie in Satz 2.4.3 gegeben. Aus diesen wesentlichen<sup>20</sup> Anfangsdaten entwickelt sich dann eindeutig die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe<sup>21</sup> zu (2.25) und (2.26) auf einem Gebiet  $V_H$  (siehe Abbildung 2.1) mit  $R, M \in C_L^2(V_H)$  und  $\varrho, U \in C_L^1(V_H)$ . Dabei ist  $H$  eine Nullfläche, die zu einem Ereignishorizont fortgesetzt werden kann.  $[V_F \cup V_H]$  ist eine Raumzeit aus idealer Flüssigkeit, die  $V_F$  Lipschitzstetig differenzierbar fortsetzt.
- c) Schließlich wird dann die (bis auf Fortsetzungen) eindeutige Vakuum-Raumzeit  $V_0$  an die Materie-Raumzeit aus idealer Flüssigkeit angeschlossen. Es entsteht eine reguläre und schwach asymptotisch flache  $C^1$ -Raumzeit

$$V := [V_F \cup V_H] \cup V_0,$$

wobei  $V_0$  die Schwarzschild-Raumzeit zur Masse  $m_H(r_b)$  ist.

Nun wird in  $V$  eine glatte, raumartige, kugelsymmetrische und einfach zusammenhängende Hyperfläche  $C$  (siehe Abb.2.2) so eingebettet, daß  $C \cap [V_V \cup V_H]$  in der Vergangenheit von  $H$  liegt und  $C \cap V_0$  asymptotisch gegen die raumartige Unendlichkeit  $\mathcal{J}^+ \cap \mathcal{J}^-$  von  $V_0$  geht, wobei  $\mathcal{J}$  die Unendlichkeit im Sinne der Notation aus [Hawk73] bezeichnet. Diese finale Raumzeit  $V$  ist dann eine „**Schwarzes-Loch-Raumzeit, die sich aus  $C$  entwickelt**“, d. h.

- (i) Die glatte, lichtartige Fortsetzung  $\tilde{H}$  von  $H$  ist ein regulärer Ereignishorizont (siehe Abb. 2.2):  $\tilde{H} = \dot{J}(\mathcal{J}^+)$ . Fer-

---

<sup>20</sup>Aus diesen wesentlichen Daten  $(\varrho_H, R_H)$  werden wie in Satz 2.4.3 die übrigen Datenfunktionen  $U_H$  und  $M_H$  aus (2.55) so festgelegt, daß die Zwangsbedingungen erfüllt sind für jede die Anfangswerte annehmende Lösung

<sup>21</sup>Die Lösung  $(R, M, \varrho, U)$  soll auf der Anfangsfläche  $H$  die Anfangsdaten  $(R_H, M_H, \varrho_H, U_H)$  annehmen und auf dem Sternrand  $\varrho \equiv \varrho_b$  erfüllen

2. Ein Existenzsatz aus der allg.-relativist. Hydrodynamik

---

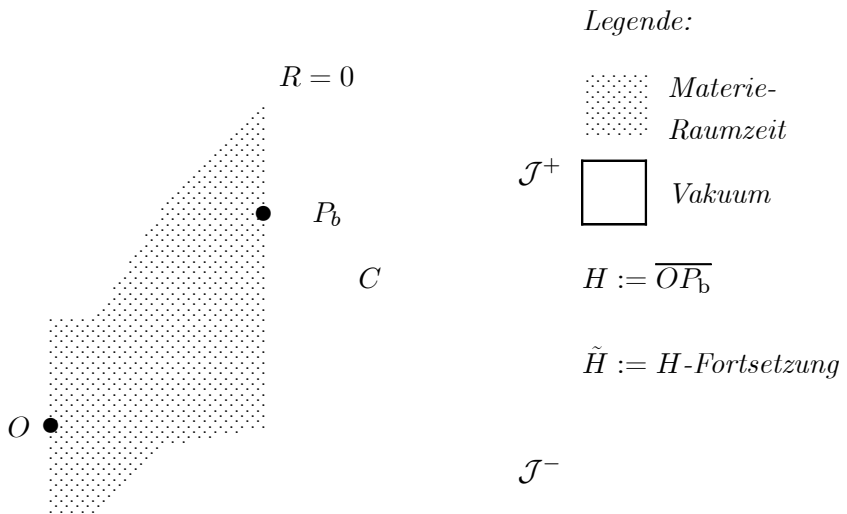


Abb. 2.2: Die kugelsymmetrische Schwarzes-Loch-Raumzeit aus idealer Flüssigkeit hat einen Ereignishorizont  $\tilde{H}$  und wird durch Daten auf der regulären, harmlosen Anfangsdatenfläche  $C$  bestimmt.

## 2.4 Konstruktion einer Raumzeit mit Schwarzem Loch

---

ner liegt in dessen Zukunft ein Bereich mit eingefangenen Flächen und ein Teil der Schwarzschild-Singularität;

- (ii) Die mit  $D^+(C)$  bezeichnete Zukunftsentwicklung von  $C$  enthält eine Umgebung des Ereignishorizontes  $\tilde{H}$  und der Abschluß (bzgl.  $V \cap \mathcal{J}$ ) von  $D^+(C)$  enthält  $\mathcal{J}^+$ ;
- (iii) Außerdem enthält  $D^+(C)$  eine Umgebung eines Teils der Zentrallinie und des Sternrandes.

**Beweis** Die Vakuum-Raumzeit  $V_0$  kann an die Materie-Raumzeit angeschlossen werden, weil am Sternrand  $B$  die Massenenergiedichte  $\varrho$  vorgabegemäß den Wert  $\varrho_b$  aus (2.3) annimmt, also  $p \equiv 0$  auf  $B$  gilt. Daß dieser Anschluß stetig differenzierbar erfolgen kann, führt Kind in ihrer Dissertation [Kind91] aus. Zu zeigen bleibt, daß  $\tilde{H}$  ein Ereignishorizont ist. Dies folgt aus der Schwarzes-Loch-Bedingung (2.62), die (2.52) impliziert. Somit gilt  $2m = R$  in  $P_b$  aus Abb. 2.2 und daher auch auf  $\tilde{H} \setminus H$ .  $\square$

Von den wesentlichen Anfangsdaten  $(\varrho_H, R_H)$  wurde verlangt, daß sie die  $(\varrho_H, R_H)$ -Bedingungen aus Definition 2.4.7 auf Seite 56 erfüllen. Wie obige Formulierung „frei vorgebar bis auf ...“ nahelegt, sind derartige Anfangsdaten tatsächlich aus einer großen Funktionen-Klasse konstruierbar: Wählt man  $\varrho_H$  als beliebige Anfangsdatenfunktion, die (2.59) erfüllt, so bleibt für  $R_H$  ein Freiheitsgrad, der mindestens der Kardinalität von  $C^\infty([0, 1] \rightarrow ]0, -\infty])$  entspricht, sofern man darin zwei Funktionen  $h$  und  $\bar{h}$  als gleich ansieht, wenn ein  $\alpha \in \mathbb{R}$  mit  $h = \alpha \bar{h}$  existiert. Dies wird in Satz 2.4.10 auf Seite 59 konkretisiert.

Der folgende Satz betrifft Schritt II aus der Einleitung dieses Abschnitts.

**Satz 2.4.5** *Sei  $V$  die Raumzeit aus Satz 2.4.4. Diese induziert Daten  $d_0$  auf  $C$ . Aus diesen Daten entwickelt sich innerhalb endlicher Eigenzeit eine eindeutige Schwarzes-Loch-Raumzeit*

$$V_{d_0} := V \cap L^+(C),$$

die einen Ereignishorizont und eingefangene Flächen enthält. Die Daten  $d_0$  auf  $C$  sind regulär und harmlos, d.h. kein Punkt von  $C$  gehört zum Ereignishorizont oder liegt in einer eingefangenen Fläche (siehe Abbildung 2.2).

Die Entstehung des Ereignishorizontes (und der durch ihn abgeschirmten eingefangenen Flächen) ist stabil gegen (kugelsymmetrische) Variationen der Anfangsdaten  $d_0$ , sofern die Daten aus einer hinreichend kleinen  $C^1$ -Umgebung gewählt werden. Auch die Zustandsgleichung darf in einer hinreichend kleinen  $C^2$ -Umgebung von  $\hat{p}$  aus (2.3) variieren.

Es gibt mindestens soviele verschiedene Anfangsdatenfunktionen  $d_0$ , wie es in Satz 2.4.4 auf  $H$  vorschreibbare Daten gibt.

**Beweis** Man kann sich auf den Materieteil der Raumzeit beschränken, weil dieser die anzuschließende Vakuum-Raumzeit eindeutig festlegt. Seien Daten  $d_0$  auf (dem Materieteil von)  $C$  sowie  $p = 0$  auf  $B$  gegeben. Dann erhält man eine eindeutige Materie-Raumzeit  $(ds^2, u^\alpha, \varrho)_{d_0}$  auf

$$V_{d_0} = [V_F \cup V_H] \cap J^+(C),$$

welche die Daten  $d_0$  annimmt. Dies zeigt man wie im Beweis von Satz 2.4.3 mit Hilfe von Satz 4.4.1, dessen Voraussetzungen neben der Zwangsbedingung nur Ungleichungen und Differenzierbarkeitsordnungen umfassen, die also in einer hinreichend kleinen Umgebung  $[V_F \cup V_H]$  von  $H$  erfüllt sind. Dabei



## 2.4 Konstruktion einer Raumzeit mit Schwarzem Loch

---

ergibt sich auch die geforderte Stabilität (bzgl. kugelsymmetrischer Variation): Für jede Datenfunktion  $d$  aus einer hinreichend kleinen  $C^1$ -Umgebung von  $d_0$  liegt die zugehörige Lösung  $(ds^2, u^a, \varrho)_{d_0}$  in einer gegebenen kleinen  $C^0$ -Umgebung von  $(ds^2, u^a, \varrho)_{d_0}$ . Insbesondere folgt die Existenz einer Nullfläche  $H_d$  mit  $2m_d = R_d$  in  $H_d \cap B$ , da  $H_{d_0}$  (als Materieteil von  $H$  aus Satz 2.4.4) diese Eigenschaft hat. Die lichtartige Fortsetzung von  $H_d$  in das anzuschließende Vakuum ist ein Ereignishorizont. Außerdem sind die Eigenschaften bzgl. Kollaps und eingefangener Flächen stabil, da sie durch Ungleichungen in den Unbekannten ausgedrückt werden.  $\square$

#### 2.4.4 Zulässige Anfangsdaten

Um die in Satz 2.4.3 behaupteten Eigenschaften der Raumzeit  $V_H$  zu erhalten, müssen die Anfangsdaten  $(R_H, M_H, \varrho_H, U_H)$ , aus denen sich die Raumzeit entwickelt, gewisse Bedingungen erfüllen.

**Definition 2.4.6** *Die Funktionen*

$$(R_H, M_H, \varrho_H, U_H) : [0, r_b] \rightarrow \mathbb{R}^4$$

heißen **zulässige Anfangsdatenfunktionen**, wenn sie für  $m_H(r) := \int_0^r (4\pi [\varrho_H R'_H - \{\hat{p} \circ \varrho_H + \varrho_H\} U_H] R_H^2) (x) dx$  die folgenden Bedingungen erfüllen:

Zwangsbedingungen (implizieren (2.39f) im Satz 2.4.3)<sup>22</sup>:

$$M_H = R'_H (R'_H - 2U_H), \quad M_H = 1 - 2m_H/R_H; \quad (2.48)$$

nichtnegativer Druck:

$$\varrho_H > \varrho_b \text{ mit Gleichheit in } r_b; \quad (2.49)$$

Kollaps:

$$U_H < 0 \text{ auf } ]0, r_b]; \quad (2.50)$$

Lichtflucht möglich:

$$R'_H > 0 \text{ auf } [0, r_b[; \quad (2.51)$$

Schwarzes-Loch-Bedingung:

$$2m_H(r_b) = R_H(r_b); \quad (2.52)$$

---

<sup>22</sup>Auf  $H$  verschwindet  $\lambda$  aus (2.30) für  $A_\Sigma = [A_H$  aus (2.8)], so daß (2.39) die Form  $\Gamma_H = R'_H - U_H$  erhält, was sich  $\Gamma_H^2 - U_H^2 = (R'_H)^2 - 2R'_H U_H$  schreiben läßt, da  $\Gamma := \sqrt{M + U^2}$  definiert wird.

## 2.4 Konstruktion einer Raumzeit mit Schwarzem Loch

---

Eckbedingung:

$$\begin{aligned} [\text{rechte Seite der } \varrho\text{-Evo aus (2.38)}] &= 0 \text{ in } r = r_b & (2.53) \\ (\text{für } (\varrho, R, U, M, \Gamma) &= (\varrho_H, R_H, U_H, M_H, \Gamma_H)) ; \end{aligned}$$

reguläres Zentrum:

$$R_H(0) = 0, \quad R'_H(0) = 1, \quad U_H(0) = 0. \quad (2.54)$$

Im allgemeinen kann man von den vier Anfangsdatenfunktionen  $(\varrho_H, R_H, U_H, M_H)$  zwei beliebige vorschreiben und die übrigen durch (2.48) ermitteln. Dabei ist der einfachste Weg,  $\varrho_H$  und  $R_H$  frei zu wählen<sup>23</sup>. Daher wurden  $(\varrho_H, R_H)$  im vorangehenden Abschnitt als wesentliche Daten bezeichnet. Die übrigen Anfangsdatenfunktionen  $U_H$  und  $M_H$  werden dann aus den Zwangsbedingungen ermittelt<sup>24</sup> durch

$$U_H := \mathcal{U}(\varrho_H, R_H) \quad \text{und} \quad M_H := R'_H (R'_H - 2U_H), \quad (2.55)$$

wobei der Operator  $\mathcal{U}(\varrho_H, R_H) : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$r \mapsto \left( \frac{e^{-\chi(r)}}{R_H(r)} \right) \cdot \int_0^r \left[ \frac{(R'_H)^2 - 1}{2} + q_H R_H \right] (x) \cdot e^{\chi(x)} dx \quad (2.56)$$

definiert ist mit

$$q_H := R''_H + 4\pi\varrho_H R_H \quad (2.57)$$

und

$$\chi(r) := \int_0^r \left[ \frac{q_H + 4\pi\hat{p}(\varrho_H) R_H}{R'_H} \right] (x) dx. \quad (2.58)$$

---

<sup>23</sup>Bei gegebenen  $(\varrho_H, R_H)$  ist die Größe  $[U_H R_H]$  die Lösung einer zu (2.48) gleichwertigen *linearen* gewöhnlichen Differentialgleichung, wie im Beweis zu Lemma 2.4.9 ausgeführt wird

<sup>24</sup>siehe Beweis von Lemma 2.4.9

2. Ein Existenzsatz aus der allg.-relativist. Hydrodynamik

---

Da also tatsächlich nur die wesentlichen Daten  $(\varrho_H, R_H)$  echt vorgegeben werden, werden nun die Bedingungen (2.48) bis (2.54) umformuliert zu Bedingungen an  $(\varrho_H, R_H)$ .

**Definition 2.4.7** Die Funktionen  $\varrho_H, R_H \in C^3([0, r_b] \rightarrow \mathbb{R})$  erfüllen die  $(\varrho_H, R_H)$ -Bedingungen, wenn die folgenden Bedingungen gelten:

nichtnegativer Druck:

$$\varrho_H > \varrho_b \text{ auf } [0, r_b[ \text{ und } \varrho_H(r_b) = \varrho_b; \quad (2.59)$$

Kollaps:

$$\mathcal{U}(\varrho_H, R_H) < 0 \text{ auf } ]0, r_b]; \quad (2.60)$$

Lichtflucht möglich:

$$R'_H > 0 \text{ auf } [0, r_b[; \quad (2.61)$$

Schwarzes-Loch-Bedingung:

$$R'_H(r_b) = 0; \quad (2.62)$$

Eckbedingung:

$$q'_H(r_b) = 8\pi\varrho_b \cdot \mathcal{U}(\varrho_H, r_H)(r_b); \quad (2.63)$$

wohldefiniertes  $\chi$  (siehe folgende Bemerkung 2.4.12):

$$q_H(r_b) = 0; \quad (2.64)$$

reguläres Symmetriezentrum:

$$R_H(0) = 0, \quad R'_H(0) = 1. \quad (2.65)$$

Daß aus diesen  $(\varrho_H, R_H)$ -Bedingungen und (2.55) zulässige Anfangsdaten entstehen, wird in Lemma 2.4.9 gezeigt.

**Bemerkung 2.4.8** (i) Die Bedingungen (2.60) und (2.61) sind Ungleichungen auf  $H$ , während (2.62) und (2.63) Gleichungen auf  $B \cap H$  sind.

- (ii) Die Eckbedingung (2.63), die zu (2.53) gleichwertig ist, ist eine technische Bedingung, die einen hinreichenden Differenzierbarkeitsgrad über die Grenze hinweg liefern soll (vgl. Satz 4.4.1, dessen Fall **ii**) hierdurch erreicht wird). Eine derartige Eckbedingung zu erfüllen, ist im allgemeinen unproblematisch. Hier wird dies aber zusätzlich durch die Schwarzes-Loch-Bedingungen (2.62) erschwert, weil  $R'_H$  in (2.58) im Nenner auftaucht. Es scheint daher auch praktisch unmöglich, Bedingungen an  $\varrho_H$  und  $R_H$  zu formulieren, die eine Eckbedingung höherer Ordnung nach sich ziehen, also das Verschwinden einer höheren Zeitableitung der rechten Seite der  $\varrho$ -Evo aus (2.38), ausgedrückt allein durch Anfangsdaten<sup>25</sup>.
- (iii) Die Ungleichungen (2.59) bis (2.61) sind stabil gegen solche kleinen Variationen (von  $(\varrho_R, R_H)$ ), die die Schwarzes-Loch-Bedingung und  $\varrho(r_b) = \varrho_b$  beibehalten. Dies folgt aus Lemma 6.3.1 auf Seite 194.
- (iv) Die Schwarzes-Loch-Bedingung (2.62) ist zu  $[2m/R = 1]$  auf  $B \cap H$  gleichwertig, sofern (2.48), (2.60) und (2.61) gelten.

---

<sup>25</sup>Dazu wäre in der höheren Zeitableitung der rechten Seite der  $\varrho$ -Evo von (2.38) folgendes zu tun: erstens  $\partial_t \partial r$  durch  $\partial_r \partial t$  ersetzen, zweitens alle Zeitableitungen durch die entsprechenden rechten Seiten von (2.38) ersetzen, drittens alle auftretenden Raumableitungen durch die entsprechenden Ableitungen der Anfangsdatenfunktionen ersetzen. Der verbleibende Ausdruck soll verschwinden und dies möge in Bedingungen an die wesentlichen  $(\varrho_H, R_H)$  beschrieben werden, wozu also insbesondere  $U_H$  und dessen Ableitungen durch die entsprechenden Integrale aus (2.56ff) zu ersetzen sind

- (v) Gleichung (2.61) bedeutet  $(D_t + D_r)R > 0$  auf  $H \setminus B$ , wobei  $H$  u. a. ein Zukunftslichtkegel ist. Diese Lichtfluchtbedingung gilt in  $V$  noch allgemeiner: Für jeden zusammenhängenden Zukunftslichtkegel  $L \subset [V_F \cup V_H]$  mit  $L \cap B \neq \emptyset$  und  $\varrho > 0$  auf  $[V_F \cup V_H] \cup B$  gilt:  $L$  kann genau dann lichtartig in  $\mathcal{J}^+$  fortgesetzt werden, wenn  $(D_t + D_r)R > 0$  auf  $L \setminus B$  gilt.
- (vi) Gleichung (2.61) ist gleichwertig zu  $2m/R < 1$  auf  $H \setminus B$ , sofern (2.48), (2.60) und (2.65) gelten. Durch (2.61) wird außerdem  $\Gamma = 0$  verhindert, wodurch die Gleichungen (2.25) wegen  $\gamma = \infty$  singularär würden. Der formal mögliche Fall  $\Gamma < 0$  ist physikalisch nicht sinnvoll (siehe [Misn68, Seite 189f]).

Im Anhang auf Seite 193 wird die Aussage aus (v) bewiesen.

**Lemma 2.4.9** Gegeben seien  $C^4([0, r_b])$ -Funktionen  $\varrho_H, R_H$ , welche die  $(\varrho_H, R_H)$ -Bedingungen erfüllen. Mit  $U_H, M_H$  aus (2.55) sind dann  $(R_H, M_H, \varrho_H, U_H)$  zulässige Anfangsdatenfunktionen. Umgekehrt sind die  $(\varrho_H, R_H)$ -Bedingungen notwendig für obige Aussage.

Der **Beweis** steht im Anhang auf Seite 195.

Gibt es Anfangsdatenfunktionen, welche die  $(\varrho_H, R_H)$ -Bedingungen erfüllen?

Dies ist der Fall, wie der folgende Satz zeigt. Obwohl die Vorgabe insbesondere wegen der in  $r_b$  zu erfüllenden Bedingungen nicht einfach ist, gibt es dabei für beide Funktionen eine große Gestaltungsfreiheit. Wählt man  $\varrho_H$  als beliebige Anfangsdatenfunktion, die (2.59) erfüllt, so bleibt für  $R_H$  ein Freiheitsgrad, der mindestens der Kardinalität von  $C^\infty([0, 1] \rightarrow ]0, -\infty])$  entspricht, sofern man darin zwei Funktionen  $h$  und  $\bar{h}$  als gleich ansieht, wenn ein  $\alpha \in \mathbb{R}$  mit  $h = \alpha \bar{h}$  existiert.

## 2.4 Konstruktion einer Raumzeit mit Schwarzem Loch

---

Gemäß Satz 2.4.4 kann man in Zentrumsnähe die Raumzeit  $V_F$  aus Lemma 2.4.1 benutzen, deren Skalare  $(R, M, \varrho, U)$  hier mit  $(R_{V_F}, M_{V_F}, \varrho_{V_F}, U_{V_F})$  bezeichnet seien. Sei  $\varepsilon > 0$  wie im Lemma so gesetzt, daß in  $(t, r)$ -Koordinaten

$$(B_H(r), r)|_{r=\varepsilon} = [\text{rechter Rand } P \text{ von } H_F]$$

gilt (siehe Abb. 2.1 auf Seite 16) und  $\varepsilon$  klein genug ist, um

$$\varepsilon < 1/4, \quad 12\varepsilon < r_b \text{ und } 16\varepsilon |q_0| < 1 \quad (2.66)$$

zu erfüllen, wobei

$$q_0 := R_H'' + 4\pi \varrho_H R_H < 0 \quad (2.67)$$

mit

$$R_H(r) := R_{V_F}(B_H(r), r) \quad \text{und} \quad \varrho_H(r) := \varrho_{V_F}(B_H(r), r) \quad (2.68)$$

auf  $[0, \varepsilon]$  die rechte Seite von (2.53) ist<sup>26</sup>. Diese Anfangsdaten-funktionen erfüllen dort die Bedingungen (2.59), (2.60), (2.61), (2.65) und mit (2.55) die Zwangsbedingungen (2.48).

**Satz 2.4.10** *Sei  $\varrho_H$  eine  $C^\infty([0, r_b] \rightarrow [\varrho_b, \infty[)$ -Fortsetzung der o. g. Restriktion von  $\varrho_{V_F}$  auf  $H_F$  mit (2.59) und*

$$16\pi (\max \varrho_H) r_b^2 < 1,$$

*deren sämtliche Ableitungen in  $r_b$  verschwinden<sup>27</sup>. Dann läßt sich für jede  $C^\infty$ -Funktion  $h : [0, 1] \rightarrow ]0, -\infty[$  ein „zulässiges“  $R_H = R_H^h$  so definieren, daß die  $(\varrho_H, R_H)$ -Bedingungen*

---

<sup>26</sup>Aus (2.8), der R-Evo von (2.25) und (2.5) folgt

$$\frac{d}{dr} R_H = B_H' \partial_t R_{V_F} + \partial_r R_{V_F} = \Gamma + U = (D_t + D_r) R_{V_F}$$

<sup>27</sup>Diese Forderung ermöglicht eine  $C^\infty$ -Fortsetzung durch die Konstante  $\varrho_b$ , was einige Beweise etwas vereinfacht

## 2. Ein Existenzsatz aus der allg.-relativist. Hydrodynamik

---

gelten und  $R_H$  auf  $[0, \varepsilon]$  die Restriktion von  $R_{V_F}$  aus (2.68) ist. Also sind dann  $(R_H, M_H, \varrho_h, U_H)$  zulässige Anfangsdaten im Sinne von Definition 2.4.6, wobei  $U_H$  und  $M_H$  in (2.55) definiert wurden. Weiter gilt  $R_H^h \neq R_H^{\bar{h}}$  für  $h \neq \bar{h}$ , sofern kein  $\alpha \in \mathbb{R}$  mit  $h = \alpha \bar{h}$  existiert.

Der Beweis basiert auf diversen Lemmata, die im Anhang ab Seite 198 formuliert und bewiesen werden. Im wesentlichen ist der Beweis ein „Algorithmus“<sup>28</sup>, um ein zulässiges  $R_H$  zu finden.

**Beweis** Da im weiteren Beweis die Skalare nur auf  $H$  betrachtet werden, alle Funktionen folglich nur von einer Veränderlichen  $r \in [0, r_b]$  oder  $r \in [0, \infty]$  abhängen, wird der Index  $H$  ab jetzt unterdrückt.

Seien die Voraussetzungen des Satzes erfüllt. Insbesondere sei  $\varrho : [0, r_b] \rightarrow [\varrho_b, 1/(16\pi r_b^2)[$  gegeben, dessen Fortsetzung durch die Konstante  $\varrho_b$  wieder glatt ist und auch mit  $\varrho$  bezeichnet sei.

Um (2.60) zu erfüllen, genügt

$$q = R'' + 4\pi\varrho R < 0 \quad (2.69)$$

sicherzustellen, wie man in (2.56) wegen  $R' < 1$ , (2.65) und (2.61) erkennt. Daher wird nicht  $R$  direkt gewählt, sondern man wählt ein weitgehend<sup>29</sup> negatives  $q \in C^\infty([0, \infty[)$  und definiert  $R := \mathcal{R}(q)$  dann als die eindeutige Lösung von

$$R'' + 4\pi\varrho R = q \text{ mit } R(0) = 0 \text{ und } R'(0) = 1 \quad (2.70)$$

---

<sup>28</sup>Etwa eine Anwendung des Zwischenwertsatzes wird hier als elementare Arbeitsanweisung angesehen, obwohl im konkreten Fall gar nicht klar ist, wie man etwa eine gesuchte Nullstelle tatsächlich in die Hand bekommt. Daher die Anführungszeichen

<sup>29</sup>Tatsächlich wird  $q$  nur auf  $[0, r_b - \varepsilon_b[$  negativ sein, wobei  $\varepsilon_b$  in (2.72) gerade so gewählt werden wird, daß diese Verletzung der Negativität nicht schlimm ist



## 2.4 Konstruktion einer Raumzeit mit Schwarzem Loch

---

Der Operator  $\mathcal{R} : Q_0 \rightarrow C^\infty([0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R})$  ist nach Lemma 6.3.3 stetig<sup>30</sup> und injektiv, wobei die Menge der geeigneten  $q$

$$Q_0 := \{\hat{q} \in C^\infty([0, \infty[); \hat{q} = q_0 \text{ auf } [0, \varepsilon], \hat{q} \equiv 0 \text{ auf } [2r_b, \infty[ \} \quad (2.71)$$

mit  $q_0$  aus (2.67) später noch einzuschränken sein wird.

Mit Hilfe des folgenden Lemmas 2.4.11 findet man ein  $q$ , dessen Bild  $R = \mathcal{R}(q)$  die in Satz 2.4.10 behaupteten Eigenschaften hat. Die Aussage zur Lösungsvielfalt wird in Bemerkung 2.4.8 gezeigt.  $\square$

**Lemma 2.4.11** *Seien  $\rho$  und  $h$  wie in Satz 2.4.10 gegeben. Sei  $\varepsilon_b \in ]0, \varepsilon]$  eine Konstante mit*

$$\left(\frac{\varepsilon_b}{2} + 4\pi \rho_{\max} r_b\right) \cdot \varepsilon_b < \frac{1}{2} \quad . \quad (2.72)$$

Sei  $q_h : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  eine nur auf  $[r_b - \varepsilon_b, \infty[$  verschwindende und sonst echt negative  $C^\infty$ -Hilfsfunktion mit  $q_h = q_0$  auf  $[0, \varepsilon]$ <sup>31</sup>,  $8\varepsilon |q_h| < 1$  auf  $[0, 2\varepsilon]$ <sup>32</sup>,

$$q_h(r) = h\left(\frac{r - 3\varepsilon}{r_b - 3\varepsilon_b - 3\varepsilon}\right) \quad \text{für } r \in [3\varepsilon, r_b - 3\varepsilon_b]$$

und  $24\varepsilon_b |q_h| < 1$  auf  $[r_b - 2\varepsilon_b, r_b - \varepsilon_b]$ . Außerdem soll die glatte Verbindung zwischen  $q_0$  (bzw. 0) und dem durch  $h$  bestimmten Teil harmlos sein:  $|q_h| < \overline{M} := \max\{|h(x)|; x \in [0, 1]\}$  und  $\left|(q_h)|_{[2\varepsilon, r_b - 2\varepsilon_b]}\right| < \underline{M} := \min\{\min\{|h(x)|; x \in [0, 1]\}, \frac{1}{16\varepsilon}\}$ .

Sei weiter  $\kappa : [0, \infty[ \rightarrow [0, 1]$  eine außerhalb von  $[\varepsilon, r_b - \varepsilon_b]$  verschwindende  $C^\infty$ -Funktion mit  $\kappa \equiv 1$  auf  $[2\varepsilon, r_b - 2\varepsilon_b]$ . Für jedes  $\tau \in \mathbb{R}$  definiere  $\kappa_\tau := 1 + (\tau - 1)\kappa$ .

---

<sup>30</sup>Die Stetigkeit wird bezüglich der Topologien  $C^0$  (bzw.  $C^1$ ) im Definitionsbereich (bzw. im Wertebereich) benötigt und gezeigt

<sup>31</sup> $q_0$  wurde in (2.67) definiert

<sup>32</sup>Das ist nach Wahl von  $\varepsilon$  in Lemma 2.4.1 mit  $16\varepsilon |q_0| < 1$  möglich

2. Ein Existenzsatz aus der allg.-relativist. Hydrodynamik

---

Sei nun  $\hat{\delta} := \min \left\{ \frac{1}{2}\varepsilon_b, 2\pi\rho_b R(\varepsilon), \frac{1}{24\varepsilon_b}, \frac{1}{4r_b} \right\}$  eine kleine Konstante<sup>33</sup>. Zu einer außerhalb von  $[-1, 1]$  verschwindenden  $C^\infty$ -Hilfsfunktion  $\tilde{\eta} : [0, \infty[ \rightarrow [-1, 1]$  mit  $\tilde{\eta}(0) = 0$  und  $\tilde{\eta}'(0) = 1$  definiert man noch für jedes  $\sigma \in \mathbb{R}$  die Funktion

$$\eta_\sigma : [0, \infty[ \rightarrow [-\hat{\delta}, \hat{\delta}], \quad r \mapsto \hat{\delta} \tilde{\eta} \left( \frac{r_b - r}{\min \{ \hat{\delta}, \varepsilon_b |\sigma| \}} |\sigma| \right).$$

Dann gibt es einen negativen Parameter  $\sigma$  und einen positiven Parameter  $\tau$  derart, daß

$$q := q_{(\sigma, \tau)} := \kappa_\tau (q_h - \eta_\sigma) \tag{2.73}$$

ein im Sinne von Satz 2.4.10 zulässiges  $R := \mathcal{R}(q)$  generiert.

Die Funktion  $q_h$  trägt die Information von  $h$ . So wird auch im Beweis zu Bemerkung 2.4.12 aus  $h \neq \bar{h}$  zunächst  $q_h \neq q_{\bar{h}}$  und daraus  $R^h \neq R^{\bar{h}}$  gewonnen.

Auf  $[0, \varepsilon]$  ist nach (2.73) die Restriktion von  $R_{V_F}$  auf  $H$  wirklich  $R = \mathcal{R}(q)$ , weil dort  $q = \kappa_\tau (q_h - \eta_\sigma) = 1 \cdot (q_h - 0) = q_0$  gilt.

**Beweis** Der Parameter  $\tau$  aus (2.73) wird benutzt, um die kleinste Nullstelle von  $R' = [\mathcal{R}(q_{(\sigma, \tau)})]'$  in  $r = r_b$  zu positionieren. Man wird zeigen, daß diese Nullstelle für hinreichend großes (bzw. kleines)  $\tau > 0$  links (bzw. rechts) von  $r_b$  liegen muß. Aus Stetigkeitsgründen wird man dann ein passendes  $\tau$  finden. Der andere Parameter  $\sigma$  soll helfen, die Eckbedingung (2.63) zu erfüllen. Daher wurde  $q_{(\sigma, \tau)}$  so definiert, daß

$$[q_{(\sigma, \tau)}]'(r_b) = \sigma \tag{2.74}$$

---

<sup>33</sup>Sie hängt zwar von  $\varrho$ , aber außerhalb von  $[0, \varepsilon]$  nicht von  $q$  bzw.  $R$  ab

2.4 Konstruktion einer Raumzeit mit Schwarzem Loch

Intervall	untere Schranke	$q_{(\sigma,\tau)}$ aus (2.73) konkret	obere Schranke
$[0, \varepsilon]$	$-\frac{1}{16\varepsilon}$	$q_0$	0
$[\varepsilon, 2\varepsilon]$	$-\tau \frac{1}{8\varepsilon}$	$\kappa_\tau q_h$	0
$[2\varepsilon, 3\varepsilon]$	$-\tau \underline{M}$	$\tau q_h$	$-\tau \overline{M}$
$[3\varepsilon, r_b - 3\varepsilon_b]$	$-\tau \underline{M}$	$\tau h \left( \frac{\cdot - 3\varepsilon}{r_b - 3\varepsilon_b - 3\varepsilon} \right)$	$-\tau \overline{M}$
$[r_b - 3\varepsilon_b, r_b - 2\varepsilon_b]$	$-\tau \underline{M}$	$\tau q_h$	$-\tau \overline{M}$
$[r_b - 2\varepsilon_b, r_b - \varepsilon_b]$	$-\tau \frac{1}{24\varepsilon_b}$	$\kappa_\tau q_h$	0
$[r_b - \varepsilon_b, r_b]$	$-\frac{1}{24\varepsilon_b}$	$-\eta\sigma$	$\hat{\delta}$
$\{r_b\}$	0	0 mit Steigung $\sigma$	0
$[r_b, r_b + \varepsilon_b]$	$-\frac{1}{24\varepsilon_b}$	$-\eta\sigma$	$\hat{\delta}$
$[r_b + \varepsilon_b, \infty[$	0	0	0

Tabelle 2.1: Die konkrete Gestalt von  $q_{(\sigma,\tau)} = \kappa_\tau (q_h - \eta\sigma)$  mit zugehörigen oberen (bzw. unteren) Schranken auf den verschiedenen Intervallen

ist. Bevor (2.63) sinnvoll betrachtet werden kann, müssen<sup>34</sup> die Bedingungen (2.64) und (2.65) erfüllt werden. Sei daher zunächst  $\sigma$  beliebig aber fest vorgegeben.

Es wird nun eine Nullstellen-Suchfunktion  $\tilde{\zeta} : Q_1 \rightarrow ]0, +\infty[$  so definiert, daß  $\tilde{\zeta}(q)$  die kleinste Nullstelle von  $[\mathcal{R}(q)]'$  ist, wobei

$$\begin{aligned} Q_1 &:= \{\hat{q} \in C^\infty([0, \infty[); \quad \hat{q} = q_0 \text{ auf } [0, \varepsilon], \\ &\quad \hat{q} < 0 \text{ auf } [0, r_b - \varepsilon_b[, |\hat{q}| \leq \hat{\delta} \text{ auf } [r_b - \varepsilon_b, r_b + \varepsilon_b], \\ &\quad \hat{q} \equiv 0 \text{ auf } ]r_b + \varepsilon_b, \infty[ \} \subset Q_0 \end{aligned} \tag{2.75}$$

mit  $Q_0$  aus (2.71) sei. Zu  $\tau > 0$  setzt man die Abkürzung  $R_\tau := \mathcal{R}(q_{(\sigma, \tau)})$ . Weil  $q_{(\sigma, \tau)}$  nach Lemma 6.3.6 in  $Q_1$  liegt, ist  $\tilde{\zeta}(q_{(\sigma, \tau)})$  definiert. Es soll nun eine Aussage über  $\zeta(R'_\tau)$  in Abhängigkeit des Parameters  $\tau$  getroffen werden. Dazu schätzt man

$$R'_\tau(r) = 1 + \int_0^r R''_\tau(\hat{r}) \, d\hat{r} = 1 + \int_0^r (q_{(\sigma, \tau_n)} - 4\pi \varrho R_\tau)(\hat{r}) \, d\hat{r}$$

mit Hilfe der Tabelle 2.4.4 nach oben (bzw. nach unten) ab. Zunächst zeigt man  $\zeta(R'_\tau) < \infty$ . Wäre  $R'_\tau$  auf  $[0, r]$  für alle  $r > r_b + \varepsilon_b$  positiv, so würde die Abschätzung

$$R'_\tau(r) \leq 1 - \tau(r_b - 4\varepsilon_b)\overline{M} + \frac{1}{12} - (r - \varepsilon) 4\pi \varrho_{\max} R_\tau(\varepsilon)$$

folgen, wobei die rechte Seite aber für hinreichend großes  $r$  negativ wäre. Also ist  $R'_\tau \mapsto \zeta(R'_\tau)$  endlich und daher nach Lemma 6.3.5 stetig. Als Hintereinanderausführung stetiger Abbildungen ist dann auch  $\tau \mapsto \zeta(R'_\tau)$  stetig, wobei die Stetigkeit von  $\tau \mapsto R'_\tau$  aus Lemma 6.3.8 folgt.

---

<sup>34</sup>im Hinblick auf die in (2.58) für  $r = r_b$  anzuwendende l'Hospitalsche Regel

## 2.4 Konstruktion einer Raumzeit mit Schwarzem Loch

---

Die Abschätzung  $R'_\tau(r) \leq 1 - \tau(r_b - 4\varepsilon_b)\overline{M}$  zeigt, daß

$$\zeta(R'_\tau) < r_b - 2\varepsilon_b \quad \text{für} \quad \tau > \overline{\tau} := \frac{1}{\overline{M}(r_b - 4\varepsilon_b)}$$

gilt. Umgekehrt gilt wieder mit Tabelle 2.4.4

$$1 - \frac{1}{16} - \frac{1}{24} - \underbrace{4\pi \varrho_{\max} \frac{r_b^2}{2}}_{< \frac{1}{8}} - \tau \left( \frac{1}{8} + (r_b - 4\varepsilon)\underline{M} + \frac{1}{24} \right) \leq R'_\tau(r_b),$$

so daß für ein (hinreichend kleines)  $\underline{\tau} > 0$  die linke Seite positiv ist. Dann gilt

$$\zeta(R'_\tau) > r_b \quad \text{alle für} \quad \tau < \underline{\tau}.$$

Nach dem Zwischenwertsatz muß also  $(\tau \mapsto \zeta(R'_\tau))^{-1} \subset [\underline{\tau}, \overline{\tau}]$  sein. Sei  $E := \left\{ (\sigma, \tau) \in \mathbb{R} \times [\underline{\tau}, \overline{\tau}]; \tilde{\zeta}(q_{(\sigma, \tau)}) = r_b \right\}$ .

Leider genügt es aber nicht, für jedes  $\sigma$  ein  $\tau$  mit  $\zeta(R'_\tau) = r_b$  finden zu können, weil das gewünschte  $\sigma$  nicht explizit angegeben werden kann, sondern selbst auch über den Zwischenwertsatz zu finden ist. Wegen (2.63) und (2.74) ist dabei ein  $\sigma$  mit  $\sigma = 8\pi \varrho_b U_b(\sigma, \tau)$  gewünscht, wobei

$$U_b : E \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\sigma, \tau) \mapsto \mathcal{U}(\varrho, \mathcal{R}(q_{(\sigma, \tau)}))(r_b) \quad (2.76)$$

sei. Nach Lemma 6.3.10 ist  $U_b$  stetig und beschränkt. Also findet man reelle Konstanten  $\sigma^- < \sigma^+$  derart, daß für die stetige Hilfsfunktion

$$\bar{\Sigma} : E \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\sigma, \tau) \mapsto \sigma - 8\pi \varrho_b U_b(\sigma, \tau) \quad (2.77)$$

$\bar{\Sigma}(\sigma^-, \cdot) < 0 < \bar{\Sigma}(\sigma^+, \cdot)$  gilt. Nach Lemma 6.3.11 findet man dann ein  $(\sigma^*, \tau^*) \in [\sigma^-, \sigma^+] \times [\underline{\tau}, \overline{\tau}]$  mit

$$\zeta(R') = r_b \quad \text{für} \quad R := \mathcal{R}(q_{(\sigma^*, \tau^*)})$$

und

$$(q_{(\sigma^*, \tau^*)})'(r_b) = 8\pi \varrho_b U_b(\sigma^*, \tau^*).$$

Mit  $q := q_{(\sigma^*, \tau^*)}$  gelten dann also alle  $(\varrho, R)$ -Bedingungen, wobei nur noch (2.60) zu zeigen ist.

Um nun dieses Vorzeichen von  $\mathcal{U}(\varrho, R)$  aus (2.56) auf  $]0, r_b]$ <sup>35</sup> zu prüfen, genügt es

$$\frac{(R'(r))^2 - 1}{2} + q(r) R(r) < 0$$

zu zeigen. Für  $r \in ]0, r_b - \varepsilon_b]$ ,  $q \in Q_2$  und  $R = \mathcal{R}(q)$  ist dies wegen  $R'(r) \in ]0, 1[$ ,  $q(r) < 0$  und  $R(r) > 0$  klar. Für  $r \in ]r_b - \varepsilon_b, r_b]$  ist

$$\begin{aligned} R'(r) &= \int_{r_b}^r R''(\hat{r}) \, d\hat{r} = - \int_r^{r_b} q(\hat{r}) \, d\hat{r} + \int_r^{r_b} \varrho(\hat{r}) R(\hat{r}) \, d\hat{r} \\ &\leq \varepsilon_b \hat{\delta} + 4\pi \varrho_{\max} r_b \cdot \varepsilon_b \leq \left(\frac{\varepsilon_b}{2} + 4\pi \varrho_{\max} r_b\right) \varepsilon_b . \end{aligned}$$

Nach (2.72) ist also  $\frac{(R'(r))^2 - 1}{2} < -\frac{3}{8}$ , so daß die Behauptung aus  $|q(r)| R(r) \leq \hat{\delta} r_b < \frac{1}{4}$  folgt.  $\square$

**Bemerkung 2.4.12** *Gelten die Voraussetzungen von Lemma 2.4.11. Für  $C^\infty$ -Funktionen  $h \neq \bar{h} : [0, 1] \rightarrow ]-\infty, 0[$  findet man verschiedene zulässige Anfangsdatenfunktionen, sofern keine Konstante  $\alpha \in \mathbb{R}$  mit  $h = \alpha \bar{h}$  existiert.*

**Beweis** Weil die zulässigen Anfangsdaten in Lemma 2.4.11 aus den wesentlichen Daten  $(\varrho, R)$  gewonnen werden, genügt es  $R^h \neq R^{\bar{h}}$  zu zeigen. Dabei ist  $R^h$  ein zu  $h$  gemäß dem Beweis von Lemma 2.4.11 konstruiertes  $R^h := \mathcal{R}(q_h^*)$  mit

$$q_h^* := \kappa_{\tau_h^*} \left( q_h - \eta_{\sigma_h^*} \right) ,$$

---

<sup>35</sup>Für  $r = 0$  liefert die Regel von l'Hospital  $U(0) = q(0) < 0$

## 2.4 Konstruktion einer Raumzeit mit Schwarzem Loch

---

wobei im Beweis gezeigt wird, daß Konstante  $\tau_h^* > 0$  und  $\sigma_h^*$  gefunden werden können bei gegebenen Funktionen  $\varrho$  und  $h$ . Weil  $\mathcal{R}$  nach Lemma 6.3.3 injektiv ist, genügt es also,  $q_h^* \neq \bar{q}_h^*$  zu zeigen. Dabei geht  $h$  (bzw.  $\bar{h}$ ) nur auf  $[3\varepsilon, r_b - 3\varepsilon_b]$  ein, wo  $\kappa_\tau = \tau$  ist. Also muß nur  $\tau_h^* h \neq \tau_h^* \bar{h}$  gezeigt werden, was aus der Voraussetzung  $h \neq \alpha \bar{h}$  für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  folgt.  $\square$

*2. Ein Existenzsatz aus der all.-relativist. Hydrodynamik*

---