

# 4. Diagonalisierung

## 4.1 Einleitung

Spivak hat in [Spiv79] ein Verfahren angegeben, um ein quasi-lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{A}(\mathbf{u}) \cdot \partial_x \mathbf{u} = \mathbf{b}(\mathbf{u})$$

durch Einführung zusätzlicher Unbekannter

$$\mathbf{v} := \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \partial_t \mathbf{u}, \tag{4.1}$$

wobei die Zeilen von  $\mathbf{S}$  Linkseigenvektoren von  $\mathbf{A}$  sind, auf die Form  $\partial_t(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{\Lambda}(\mathbf{u}) \cdot \partial_x(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  zu bringen, wobei die Matrix  $\mathbf{\Lambda}$  Diagonalgestalt hat. Diese Form heißt **diagonales System**. Spivak führt diese Diagonalisierung aber nur durch unter der Annahme, daß  $\mathbf{A}(\mathbf{u})$  invertierbar ist. Dann ist nämlich  $\partial_x \mathbf{u} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{b} - \partial_t \mathbf{u})$  in  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  ausdrückbar, weil  $\partial_t \mathbf{u} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{v}$  nach vorausgesetzter Hyperbolizität existiert.

Leider ist unser System (2.25) nicht von dieser Gestalt, da die ersten beiden der Größen  $(R, \Gamma^2 - U^2, \varrho, U)$  in Richtung der Stromlinien propagiert werden, also zum Eigenwert 0 gehören. Um dennoch zu diagonalisieren, kann man entweder durch

eine Transformation die Stromlinien kippen<sup>1</sup> oder die Zwangsbedingungen ausnutzen, was ich im folgenden durchführe.

In unserem Anwendungsfall gehören nämlich zu den beiden in Stromrichtung propagierten Größen  $R$  und  $M = \Gamma^2 - U^2$  die Zwangsbedingungen

$$\partial_x R = e^{\lambda/2} \Gamma \quad \text{und} \quad M - 1 + \frac{2m}{R} = 0,$$

die es ermöglichen,  $\partial_x R$  und  $\partial_x M$  durch  $(R, M, \varrho, U)$  und deren Zeitableitungen auszudrücken. Diese „erweiterte Diagonalisierung mit Zwangsbedingungen“ wird in Abschnitt 4.2 beschrieben und dann in Abschnitt 4.4 auf System (2.25) angewandt.

#### 4.1.1 Vergleich zweier Diagonalisierungsmethoden

Wie im Abschnitt 4.1 erwähnt und im Abschnitt 4.4 ausgeführt wurde, erfordert u. a. das relativistische Anwendungsbeispiel (2.25) eine Erweiterung des Diagonalisierungsverfahrens von Spivak um eine spezielle Benutzung der Zwangsbedingungen. Diese Erweiterung ist aber für den in diesem Abschnitt behandelten Vergleich nicht wesentlich, so daß in diesem Abschnitt nur die „Diagonalisierung des quasilinearen Systems nach Spivak“ betrachtet wird. Verglichen wird sie mit dem bekannten Verfahren aus [Cour66], das hier „Diagonalisierung des linearisierten Systems“ genannt wird.

Zu lösen ist das partielle Differentialgleichungssystem aus Abschnitt 4.1

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{A}(\mathbf{u}) \cdot \partial_x \mathbf{u} = \mathbf{b}(\mathbf{u}) \tag{4.2}$$

---

<sup>1</sup>Durch die Koordinatentransformation  $(\hat{t} = t, \hat{r} = r - \kappa t)$ , d.h.  $(\partial_r = \partial_{\hat{r}}, \partial_t = \partial_{\hat{t}} - \kappa \partial_{\hat{r}})$  mit  $\kappa \in \mathbb{R}$  ginge  $\mathbf{A}$  in  $\mathbf{A} - \kappa \mathbf{E}$  über, wobei  $\mathbf{E}$  die Einheitsmatrix ist, und  $(\mathbf{A} - \kappa \mathbf{E})^{-1}$  für hinreichend große  $\kappa$  existiert. Für die angestrebte Anwendung mit Randdaten auf  $[r = r_b]$  und Anfangsdaten auf  $[t = B'_{\text{H}}(r)]$  ist der Weg über diese Koordinatentransformation zwar gangbar, aber umständlich.

mit zugehörigen Anfangs- (und Rand)daten, welche hier unerwähnt bleiben. Wie in Abschnitt 4.1 sei  $\mathbf{S}(\mathbf{u})$  eine Matrix, deren Zeilen die Linkseigenvektoren von  $\mathbf{A}(\mathbf{u})$  sind, so daß

$$\mathbf{S}(\mathbf{u})\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{\Lambda}(\mathbf{u})\mathbf{S}(\mathbf{u}) \quad (4.3)$$

gilt, wobei  $\mathbf{\Lambda}(\mathbf{u})$  die Diagonalmatrix der Eigenwerte von  $\mathbf{A}(\mathbf{u})$  ist. Ausgangspunkt für **beide Diagonalisierungen** ist

$$\mathbf{S}(\mathbf{u})\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{\Lambda}(\mathbf{u})\mathbf{S}(\mathbf{u})\partial_x \mathbf{u} = \mathbf{S}(\mathbf{u})\mathbf{b}(\mathbf{u}), \quad (4.4)$$

was mit (4.3) äquivalent zu (4.2) ist, wobei  $\mathbf{S}(\mathbf{u})$  invertierbar sei.

#### *Diagonalisierung des linearisierten Systems*

Dies ist das alte Standardverfahren aus [Cour66]. Dieses wird in Beweisen für Existenz- und Eindeutigkeitsätze auf linearisierte Systeme angewandt. Ähnlich wie in Abschnitt 3.1.9 auf Seite 79 wird dabei eine Iteration  $\mathbf{u}_{(n+1)} := \mathcal{T}\mathbf{u}_{(n)}$  durchgeführt, wobei  $\mathcal{T}$  eine Funktion  $\mathfrak{w}$  auf die Lösung  $\mathbf{u}$  der linearen Gleichung

$$\mathbf{S}(\mathfrak{w})\partial_t(\mathbf{u}) + \mathbf{\Lambda}(\mathfrak{w})\mathbf{S}(\mathfrak{w})\partial_x(\mathbf{u}) = \mathbf{S}(\mathfrak{w})\mathbf{b}(\mathfrak{w}) \quad (4.5)$$

wirft.

Mit der Abkürzung

$$\mathcal{U}_{\mathfrak{w}} := \mathbf{S}(\mathfrak{w}) \cdot \mathbf{u} \quad (4.6)$$

ist (4.5) äquivalent zu

$$\partial_t \mathcal{U}_{\mathfrak{w}} + \mathbf{\Lambda}(\mathfrak{w})\partial_x(\mathcal{U}_{\mathfrak{w}}) = \mathcal{B}(\mathfrak{w}, \mathcal{U}_{\mathfrak{w}}) \quad (4.7)$$

für

$$\mathcal{B}(\mathfrak{w}, \mathcal{U}_{\mathfrak{w}}) := \mathbf{S}(\mathfrak{w})\mathbf{b}(\mathfrak{w}) + [\partial_t \mathbf{S}(\mathfrak{w}) + \mathbf{\Lambda}(\mathfrak{w})\partial_x \mathbf{S}(\mathfrak{w})] \mathbf{S}^{-1}(\mathfrak{w}) \cdot \mathcal{U}_{\mathfrak{w}},$$

so daß (4.7) ein **diagonales**, lineares, partielles Differentialgleichungssystem in  $\mathcal{U}_{\mathfrak{w}}$  ist, welches durch Integration längs der Charakteristiken gelöst werden kann. Für die Iteration  $\mathbf{u}_{(n+1)} := \mathcal{T}\mathbf{u}_{(n)}$  hängt die Diagonalisierungs-Transformation (4.6) von  $\mathfrak{w} = \mathbf{u}_{(n)}$  ab, d.h. im allgemeinen **ändert sich mit jedem Iterationsschritt** die Transformation. Das erschwert die Beweise insbesondere beim Zusammentreffen von Anfangs- und Randdaten und macht numerische Ansätze komplexer als das folgende Verfahren.

*Diagonalisierung des quasilinearen Systems nach Spivak*

Sei  $\mathbf{A}(\mathbf{u})$  invertierbar. Dann läßt sich (4.2) in der gleichwertigen Form (4.4) direkt (also ohne Linearisierung) diagonalisieren. Dazu wird (4.4) nach  $t$  differenziert zu

$$\partial_t [\mathbf{S}(\mathbf{u})\partial_t \mathbf{u}] + \mathbf{\Lambda}(\mathbf{u})\partial_x [\mathbf{S}(\mathbf{u})\partial_t \mathbf{u}] = \mathfrak{b}^* \quad (4.8)$$

mit der Abkürzung

$$\mathfrak{b}^* := \partial_t (\mathbf{S}(\mathbf{u})\mathfrak{b}(\mathbf{u})) - \partial_t (\mathbf{\Lambda}(\mathbf{u})\mathbf{S}(\mathbf{u}))\partial_x \mathbf{u} + \mathbf{\Lambda}(\mathbf{u}) (\partial_x \mathbf{S}(\mathbf{u}))\partial_t \mathbf{u} .$$

Durch Einführung der neuen Unbekannten

$$\mathfrak{v} := [\mathbf{S}(\mathbf{u})\partial_t \mathbf{u}] \quad \{\text{das ist } [\dots] \text{ aus (4.8)}\} \quad (4.9)$$

erhält man

$$\begin{aligned} \partial_t \mathfrak{v} + \mathbf{\Lambda}(\mathbf{u})\partial_x \mathfrak{v} &= \mathfrak{b}^* \\ \partial_t \mathbf{u} &= (\mathbf{S}(\mathbf{u}))^{-1} \mathfrak{v} \quad , \end{aligned} \quad (4.10)$$

wobei noch zu zeigen ist, daß sich die Akürzung  $\mathfrak{b}^*$  ableitungsfrei als Funktion in  $(\mathbf{u}, \mathfrak{v})$  schreiben läßt

$$\mathfrak{b}^* = \mathfrak{b}^*(\mathbf{u}, \mathfrak{v}) \quad . \quad (4.11)$$

Dabei ist (4.10) mit (4.11) ein **diagonales**, quasilineares, partielles Differentialgleichungssystem für  $(\mathbf{u}, \mathfrak{v})$ .

Da für beliebige, differenzierbare Funktionen  $F(\mathbf{u})$  und  $G(\mathbf{u})$

$$\partial_t F(\mathbf{u}) = (\nabla_{\mathbf{u}} F(\mathbf{u})) \partial_t \mathbf{u} \quad \text{und} \quad \partial_x G(\mathbf{u}) = (\nabla_{\mathbf{u}} G(\mathbf{u})) \partial_x \mathbf{u}$$

gelten, genügt es zum Beweis von (4.11) zu zeigen, daß erstens  $\partial_t \mathbf{u}$  und zweitens  $\partial_x \mathbf{u}$  ableitungsfrei in  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  schreibbar sind. Das erstere folgt aus (4.10), während das zweite dann durch Umformung von (4.2) zu

$$\partial_x \mathbf{u} = (\mathbf{A}(\mathbf{u}))^{-1} \left( \mathbf{b}(\mathbf{u}) - (\mathbf{S}(\mathbf{u}))^{-1} \mathbf{v} \right) \quad (4.12)$$

folgt.

#### *Fazit*

Bei der „Diagonalisierung des linearisierten Systems“ wird das partielle Differentialgleichungssystem (4.2) (bzw. (4.4)) in eine Folge von linearen Gleichungssystemen umgeschrieben. In **jedem Iterationsschritt** wird das linearisierte, partielle Differentialgleichungssystem **diagonalisiert**, was die Iterationssteuerung (Datenvorgabe, Numerik) aufwendig macht. Bei der „Diagonalisierung des quasilinearen Systems nach Spivak“ wird dagegen das partielle Differentialgleichungssystem (4.2) (bzw. (4.4)) **direkt als quasilineares System diagonalisiert**, wobei sich allerdings die Anzahl der Unbekannten verdoppelt. Das dabei entstandene System wird dann iterativ gelöst. Dadurch sind gemischte Anfangs-Randwertaufgaben einfach trennbar in ein reines Anfangswertproblem (IVP) und ein Charakteristik-Randwertproblem (CBVP). Solch eine Trennung ist beim alten Verfahren insbesondere dann nicht möglich, wenn die Randwerte von der Lösung abhängig sind, weil dann für jede Iteration die Werte transformiert werden müssen.

Im ersten Verfahren (siehe (4.7)) wirkt die Diagonalmatrix auf **1. Ableitungen von  $u$** . Dagegen wirkt im zweiten Verfahren (siehe (4.10)) die Diagonalmatrix auf **1. Ableitungen von**

$\mathfrak{v}$ , d.h. auf **2. Ableitungen von  $\mathbf{u}$** . Durch diese Erhöhung der Ableitungsordnung war die direkte Diagonalisierung möglich.

Wie oben angedeutet benötigen die in dieser Arbeit behandelten Anwendungen eine Erweiterung des Diagonalisierungsverfahrens von Spivak um eine spezielle Benutzung der Zwangsbedingungen, weil (4.12) nicht anwendbar ist, da  $\mathbf{A}(\mathbf{u})$  nicht invertierbar ist. Um dennoch alle Komponenten der Ableitungen  $\partial_x \mathbf{u}$  ableitungsfrei in  $(\mathbf{u}, \mathfrak{v})$  auszudrücken, werden daher die Zwangsbedingungen ausgenutzt (siehe Abschnitt 4.4 für das Anwendungsbeispiel aus der Relativitätstheorie).

##### 4.1.2 Schreibweisen

In diesem eher mathematischen Abschnitt benutze ich ab jetzt anstelle der etwas unpräzisen Schreibweise  $\mathbf{A}(\mathbf{u})$  als Abkürzung von  $(t, x) \mapsto \mathbf{A}(t, x, \mathbf{u}(t, x))$  lieber den Ausdruck  $\mathbf{A} \circ \bar{\mathbf{u}}$ , wobei also der obere Querstrich die Graphenabbildung<sup>2</sup> symbolisiert. Diese etwas akademischere Schreibweise ist hier deshalb geboten, weil die Methode darauf beruht, daß Ableitungen wie  $\frac{d}{dx} \mathbf{A}(t, x, \mathbf{u}(t, x)) = \partial_t \mathbf{A} + \partial_{\mathbf{u}} \mathbf{A} \cdot \partial_x \mathbf{u}$  linear in  $\partial_x \mathbf{u}$  sind. Dagegen müßten die Aussagen der vorangehenden Abschnitte 3.2 und 3.3 auch für Funktionale gelten (siehe Abschnitt 3.1.8).

In diesem Abschnitt bezeichnet  $\mathbf{u}_x$  **nicht**  $\partial_x \mathbf{u}$ , sondern  $\mathbf{u}_x$  ist ein mit Hilfe von  $(\mathbf{u}, \mathfrak{v})$  definierter Ausdruck, der allerdings die Eigenschaft hat, daß für eine Lösung des betrachteten Differentialgleichungssystems  $\mathbf{u}_x = \partial_x \mathbf{u}$  gilt, was dann allerdings zu beweisen ist. Entsprechendes gilt für  $\mathbf{u}_t$ , für das aber wegen (4.1) bei Vorliegen einer Lösung  $\mathbf{u}_t = \partial_t \mathbf{u}$  offensichtlich ist.

Schließlich verzichte ich ab jetzt für den Rest dieses Abschnitts auf Frakturschrift, weil keine Skalarfelder auftauchen.

---

<sup>2</sup>Für  $f : X \rightarrow Y$  ist  $\bar{f} : X \rightarrow X \times Y, x \mapsto (x, f(x))$ .

## 4.2 Umformen der Systeme

In diesem Abschnitt wird das Verfahren formal korrekt und ausführlich beschrieben. Wer zunächst eine erste Orientierung über das hekömmliche Verfahren aus [Spiv79] wünscht, findet dies in Abschnitt 4.1.1 auf Seite 100.

Betrachtet wird nun das quasilineare hyperbolische System partieller Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{u} &= \hat{b} \circ \bar{u} \\ \partial_t \tilde{u} + (\mathbf{A} \circ \bar{u}) \cdot \partial_x \tilde{u} &= \tilde{b} \circ \bar{u} \end{aligned} \quad (4.13)$$

für die Unbekannten  $u = (\hat{u}, \tilde{u})$  in zwei unabhängigen Variablen  $(t, x)$ , wobei  $\mathbf{A} \circ \bar{u}$  (für alle zulässigen  $\bar{u}$ ) invertierbar sei. Dazu gebe es  $C_L^2$ -Anfangsdaten  $u_0 = (\hat{u}_0, \tilde{u}_0)$  auf  $[t = t_0(x)]^3$

$$u(t_0(x), x) = u_0(x) \quad \text{für alle } x \in [x_{\text{links}}, x_{\text{rechts}}], \quad (4.14)$$

wobei  $t_0 \in C_L^2([x_{\text{links}}, x_{\text{rechts}}])$  gegeben sei.

**Definition 4.2.1** Sei  $G$  ein Gebiet, und sei  $\hat{H}$  eine  $C_L^1$ -Funktion  $\hat{H} : G \times \mathbb{R}^{\dim u + \dim \hat{u}} \rightarrow \mathbb{R}^{\dim \hat{u}}$ . Damit definiert man

$$\hat{Z} := \hat{u}_x - \partial_x \hat{u} \quad \text{mit} \quad \hat{u}_x := \hat{H} \circ \overline{(u, \hat{u}_t)}, \quad \hat{u}_t := \hat{b} \circ \bar{u}. \quad (4.15)$$

Ähnlich werde

$$\tilde{Z} := \tilde{u}_x - \partial_x \tilde{u} \quad \text{mit} \quad \tilde{u}_x := (\mathbf{A} \circ \bar{u})^{-1} \cdot [\tilde{b} \circ \bar{u} - \partial_t \tilde{u}] \quad (4.16)$$

definiert. Man sagt, daß die **(Pseudo-)Zwangsbedingung**  $\hat{Z} = 0$  **propagiert wird**, wenn für jede  $C^1$ -Lösung  $u = (\hat{u}, \tilde{u})$  von  $\partial_t \hat{u} = \hat{b} \circ \bar{u}$

$$\partial_t \hat{Z} = \left[ \text{lineare Funktion in } \left( \hat{Z}, \tilde{Z} \right) \right] \quad (4.17)$$

---

3

$$[t = t_0(x)] := \left\{ (t, x) \in \mathbb{R}^2; \quad t = t_0(x), x \in [x_{\text{links}}, x_{\text{rechts}}] \right\}$$

gilt<sup>4</sup>.

In (4.16) wurde  $\tilde{u}_x$  so definiert, daß für jede  $C^1$ -Lösung  $u = (\hat{u}, \tilde{u})$  von  $\partial_t \hat{u} = \hat{b} \circ \bar{u}$  genau dann  $\tilde{Z} \equiv 0$  gilt, wenn  $u$  eine Lösung von (4.13) ist, wie sich unmittelbar aus den Definitionen in (4.16) ergibt.

Es soll jetzt gezeigt werden, daß hier unter „Propagation der (Pseudo-)Zwangsbedingung“ dasselbe verstanden wird wie auf Seite 32. Sei dazu (4.13) auf einem Gebiet  $G$  erfüllt und es gelte dort auch (4.17). Dann folgt  $\tilde{Z} \equiv 0$  auf

$$G^\perp := \{ (t, x) \in G; \quad (4.18) \\ x \in [x_{\text{links}}, x_{\text{rechts}}], [t_0(x), t] \times \{x\} \subset G \},$$

sofern nur die Anfangsdaten  $\hat{Z} = 0$  erfüllen. Da  $\tilde{Z} \equiv 0$  vorausgesetzt ist, handelt es sich nämlich dann in (4.17) um ein eindeutig lösbares, homogenes System gewöhnlicher Differentialgleichungen mit Anfangswert 0.  $\hat{Z}$  verschwindet also dort, wohin man innerhalb von  $G$  entlang  $t$ -Linien, die auf der Anfangsfläche starten, gelangen kann.

Sei  $\Lambda$  die Diagonalmatrix der Eigenwerte von  $\mathbf{A}$ , und seien die Zeilen der Matrix  $\mathbf{S}$  zugehörige Links-Eigenvektoren, d.h. es gelte

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{A} = \Lambda \cdot \mathbf{S} \quad . \quad (4.19)$$

Nach vorausgesetzter Hyperbolizität ist das so definierte  $\mathbf{S} \circ \bar{u}$  invertierbar (für alle zulässigen  $u$ ).

Wir zeigen im nächsten Satz, daß das allgemeine quasilineare System (4.13) auf die Diagonalgestalt (4.20) gebracht werden kann, wenn es Zwangsbedingungen für  $\hat{u}$  gibt (und  $(\mathbf{A} \circ \bar{u})$  invertierbar ist). Dabei entspricht eine  $C_L^2$ -Lösung von (4.13)

---

<sup>4</sup>Für den Nachweis von (4.17) darf dabei **nicht**  $\partial_t u + (\mathbf{A} \circ \bar{u}) \cdot \partial_x u = b \circ \bar{U}$  benutzt werden, wohl aber  $\partial_t u + (\mathbf{A} \circ \bar{u}) \cdot u_x = b \circ \bar{U}$  mit  $u_x$  aus (4.16).



einer  $C_L^1$ -Lösung von (4.20), weil  $v = (\mathbf{S} \circ \bar{u}) \cdot \partial_t \tilde{u}$  aus Ableitungen der Grundunbekannten  $\tilde{u}$  gebildet wird (und auch die Ableitungen von  $\hat{u}$  in  $(u, v)$  ausdrückbar sind).

**Satz 4.2.2** *Wie in Definition 4.2.1 sei eine Funktion  $\hat{H}$  so gegeben, daß die Zwangsbedingung  $\hat{Z} = 0$  aus (4.15) propagiert wird. Sei  $G \subset \mathbb{R}^2$  ein Gebiet, und sei  $G^\perp$  gemäß (4.18) definiert. Dann ist für jede  $C_L^2(G)$ -Lösung  $u = (\hat{u}, \tilde{u})$  von (4.13), die  $\hat{Z} = 0$  erfüllt, durch  $v := (\mathbf{S} \circ \bar{u}) \cdot \partial_t \tilde{u}$  eine  $C_L^1$ -Lösung  $(u, v)$  des diagonalisierten Systems*

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{u} &= \hat{b} \circ \bar{u} \\ \partial_t \tilde{u} &= (\mathbf{S} \circ \bar{u})^{-1} \cdot v \\ \partial_t v + (\mathbf{A} \circ \bar{u}) \cdot \partial_x v &= g \circ \overline{(u, v)} \end{aligned} \quad (4.20)$$

auf  $G^\perp$  gegeben, wobei  $g$  in (8.3) auf Seite 238 definiert wird. Ist umgekehrt  $(u, v)$  eine  $C_L^1(G)$ -Lösung von (4.20) mit

$$\left( \hat{Z}, \tilde{Z} \right)_{|[t=t_0(x)]} = 0, \quad (4.21)$$

dann ist  $u$  eine  $C_L^2$ -Lösung von (4.13) auf  $G^\perp$ .

Die erste Bedingung aus (4.21) ist dabei die Zwangsbedingung  $\hat{Z} = 0$ , welche die Daten  $\tilde{u}_0$  aus (4.14) ohnehin respektieren müssen. Die Forderung  $\tilde{Z}_{|[t=t_0(x)]} = 0$  dagegen betrifft die Verknüpfung von  $u$  und  $v$ . Sie wird i.d.R. durch Auswerten von  $v = \mathbf{S} \cdot \partial_t \tilde{u}$  auf  $[t = t_0(x)]$  realisiert. Etwa im Falle  $t_0 \equiv 0$  ist  $v(0, \cdot) = v_0$  mit

$$v_0(x) := \mathbf{S}(0, \bar{u}_0(x)) \cdot \left[ \hat{b}(0, \bar{u}_0(x)) - \mathbf{A}(0, \bar{u}_0(x)) \cdot \tilde{u}'_0(x) \right] \quad (4.22)$$

und  $\tilde{Z}_{|[t=0]} = \left( \mathbf{A}^{-1} [\hat{b} - \mathbf{S}^{-1}v] - \tilde{u}'_0 \right)_{|[t=0]}$  verschwindet.

Der **Beweis von Satz 4.2.2** steht in Abschnitt 8.1 des Anhangs ab Seite 237.

### 4.3 Anwendung auf andere Anfangsflächen

Im 2. Kapitel wird eine Schwarzes-Loch-Raumzeit konstruiert, indem unter anderem ein Anfangswertproblem mit Anfangsfläche  $[t = B_H(x)]$  gelöst wird. Um den zweiten Teil von Satz 4.2.2 im Falle  $t_0 = B_H$  anwenden zu können, ist zu zeigen, daß (im Sinne von Satz 2.4.3 auf Seite 44) zulässige Anfangsdaten  $u_0 = (R_H, M_H, \varrho_H, U_H)$  die Bedingungen (4.21) erfüllen. Die normale Zwangsbedingung  $\hat{Z}|_{[t=B_H(r)]} = 0$  steckt dabei im Begriff der zulässigen Daten, wenn man  $\hat{H}$  aus (4.15) richtig wählt, wie es in Formel (4.30) von Abschnitt 4.4.4 durchgeführt ist. Das Verschwinden von  $\tilde{Z} = \tilde{u}_x - \partial_x \tilde{u}$  auf  $[t = t_0(x)]$  kann dagegen i. allg. durch geeignete Vorgabe an  $v$  erfüllt werden, wie folgendes Lemma zeigt.

**Lemma 4.3.1** *Gegeben sei durch  $t_0 \in C_L^2([x_{\text{links}}, x_{\text{rechts}}])$  eine Anfangsfläche  $[t = t_0(x)]$ . Dort mögen  $C_L^2$ -Daten  $u_0 = (\hat{u}_0, \tilde{u}_0)$  vorliegen. Sei  $(u, v)$  eine  $C_L^1(G)$ -Lösung von (4.20). Die Anfangsfläche sei nirgends charakteristisch<sup>5</sup>. Dann verschwindet  $\tilde{Z}$  aus (4.16) auf  $[t = t_0(x)]$  genau dann, wenn dort  $v = v_0$  mit*

$$v_0 := \mathbf{S} \cdot \left\{ \tilde{b} - \mathbf{A} (\mathbf{E} - t'_0 \mathbf{A})^{-1} [\tilde{u}'_0 - t'_0 \tilde{b}] \right\} \quad (4.23)$$

gilt.

Im Fall  $t_0 \equiv 0$  geht (4.23) in (4.22) über.

**Beweis** Mit  $\tilde{u}_x := \mathbf{A}^{-1} \cdot [\tilde{b} - \mathbf{S}^{-1}v]$  wird wegen  $\partial_t \tilde{u} = \mathbf{S}^{-1}v$  nach (4.20) dasselbe  $\tilde{u}_x$  wie in (4.16) definiert. Bezeichne  $\mathbf{E}$  die Einheitsmatrix. Aus der intrinsischen Ableitung

$$\begin{aligned} \tilde{u}'_0 &= t'_0 \cdot \partial_t \tilde{u} + \partial_x \tilde{u} = t'_0 \left( \tilde{b} - \mathbf{A} \tilde{u}_x \right) + \partial_x \tilde{u} \\ &= t'_0 \left( \tilde{b} - \mathbf{A} \tilde{Z} \right) + (\mathbf{E} - t'_0 \mathbf{A}) \partial_x \tilde{u} \end{aligned}$$

---

<sup>5</sup>In anderen Worten: Für alle  $x \in [x_{\text{links}}, x_{\text{rechts}}]$  sei  $t'_0(x)$  **nicht** Eigenwert von  $\mathbf{A}^{-1}(t_0(x), x, u_0(x))$

erhält man  $\partial_x \tilde{u} = (\mathbf{E} - t'_0 \mathbf{A})^{-1} \left[ \tilde{u}'_0 - t'_0 (\tilde{b} - \mathbf{A} \tilde{Z}) \right]$ , weil nach Voraussetzung  $(\mathbf{E} - t'_0 \mathbf{A}) = \mathbf{A} (\mathbf{A}^{-1} - t'_0 \mathbf{E})$  auf  $[t = t_0(x)]$  invertierbar ist. Wieder wegen  $\tilde{Z} = \tilde{u}_x - \partial_x \tilde{u}$  und nach Definition von  $\tilde{u}_x$  gilt andererseits

$$v = \mathbf{S} \cdot \left[ \tilde{b} - \mathbf{A} \tilde{u}_x \right] = \mathbf{S} \cdot \left[ \tilde{b} - \mathbf{A} \partial_x \tilde{u} \right] - \mathbf{S} \mathbf{A} \tilde{Z}.$$

Setzt man darin obiges  $\partial_x \tilde{u}$  ein, so erhält man  $v = v_0 - \mathbf{M} \tilde{Z}$  mit  $v_0$  aus (4.23) und  $\mathbf{M} := \mathbf{S} \mathbf{A} \left[ t'_0 (\mathbf{E} - t'_0 \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{E} \right]$ .

Wählt man also  $v = v_0$  auf  $[t = t_0(x)]$ , so passen alle Anfangsdaten  $(u_0, v_0)$  zusammen, und es verschwindet  $\tilde{Z}$  genau dann, wenn  $\mathbf{M}$  invertierbar ist. Dies folgt aber aus

$$\det M = \det \mathbf{S} \mathbf{A} (\mathbf{E} - t'_0 \mathbf{A})^{-1} \cdot \det (t'_0 \mathbf{A} + (\mathbf{E} - t'_0 \mathbf{A})) \neq 0 \quad (4.24)$$

wegen  $\det (\mathbf{E} - t'_0 \mathbf{A})^{-1} \neq 0$  auf  $[t = t_0(x)]$ .  $\square$

Für den Anwendungsfall aus Kapitel 2 ist die lichtartige Anfangsfläche  $[t = B_H(x)]$  nach Lemma 2.3.8 nirgends charakteristisch.

### 4.3.1 Anwendung mit Randdaten

Liegt auf  $G = [t_0, t_0 \pm T] \times [x_{\text{links}}, x_{\text{rechts}}]$  eine  $C^1$ -Lösung eines MIBVP vor, so ist  $G^\perp = G$ , und der Satz 4.2.2 ist anwendbar. Er liefert eine Lösung mit Randwerten für  $v$  in  $x_{\text{Rand}} \in \{x_{\text{links}}, x_{\text{rechts}}\}$ , die sich aus  $\partial_t \tilde{u} = (\mathbf{S} \circ \bar{u})^{-1} \cdot v$  und  $\tilde{u}(t_0, x_{\text{Rand}})$  ermitteln lassen.

Praktisch stellt sich aber die Frage umgekehrt: Vorgelegt sei ein System (4.13), für das eine Lösung des MIBVP gesucht ist mit bestimmten Randwertvorgaben an  $\tilde{u}$ . Welche Werte muß man den  $v$ -Komponenten am jeweils passenden Rand vorschreiben, damit die vorschreibbaren Grundunbekannten von  $u = (\hat{u}, \tilde{u})$  dort die angestrebten Werte annehmen?

#### 4. Diagonalisierung

---

Seien zur Behandlung dieser Frage die Eigenwerte  $\lambda_j \circ \bar{u}$  ( $j = 1, \dots, K$ ) von  $\mathbf{A}$  aus (4.13) so numeriert, daß

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0 > \lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \dots, \lambda_K$$

für alle zulässigen  $u$  gilt. Dann sind nach Courant und Hilbert [Cour66] Randvorgaben

$$\begin{aligned} (L_i \circ \bar{u}) \cdot \tilde{u} &= \phi_i \circ \bar{u} \quad \text{auf } [x = x_{\text{links}}] \quad (i = 1, \dots, n) \\ (L_k \circ \bar{u}) \cdot \tilde{u} &= \psi_k \circ \bar{u} \quad \text{auf } [x = x_{\text{rechts}}] \quad (k = n + 1, \dots, N) \end{aligned} \quad (4.25)$$

anzugeben. Wie in Abschnitt 3.1.1 ist dabei  $L_j$  ein Linkseigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_j$ . Für das diagonalisierte System (4.20) lauten die vorzugebenden Randdaten dagegen

$$\begin{aligned} v_i &= (L_i \circ \bar{u}) \cdot \partial_t \tilde{u} = \phi_i \circ \overline{(\hat{u}, \tilde{u}, v_{n+1}, v_{n+2}, \dots, v_N)} \\ v_k &= (L_k \circ \bar{u}) \cdot \partial_t \tilde{u} = \psi_k \circ \overline{(\hat{u}, \tilde{u}, v_1, v_2, \dots, v_n)} \end{aligned} \quad (4.26)$$

für  $i = 1, \dots, n$  auf  $[x = x_{\text{links}}]$  (bzw. für  $k = n + 1, \dots, K$  auf  $[x = x_{\text{rechts}}]$ ).

Ob man nun beliebige Wünsche der Form (4.25) mittels (4.26) befriedigen kann, habe ich nicht positiv geklärt. In unserem Anwendungsfall sind jedenfalls  $\partial_t \varrho \equiv 0$  am Sternrand (und  $\partial_t U \equiv 0$  im Zentrum)<sup>6</sup> angestrebt. Dies wird durch  $v_2 = v_1$  auf  $[r = r_b]$  (und  $v_1 = -v_2$  auf  $[r = 0]$ ), wie ich in Abschnitt 4.4.3 ausführe.

#### 4.3.2 Lösungen des MIBVP mit Knick

Für eine Lösung des MIBVP mit Knick wird man Satz 4.2.2 zweimal anwenden. Zunächst mit  $G = G_{\text{IVP}}(T)$ , wo Satz 3.2.4

---

<sup>6</sup>sofern man überhaupt mit Zentrum arbeitet, was ich zwar in dieser Arbeit vermeide, für die numerische Praxis aber durchaus für möglich und interessant halte. Zur Singularität des diagonalisierten  $(t, r)$ -Systems siehe Seite 115

eine  $C^1$ -Lösung  $(u, v)$  von (4.20) liefert, und anschließend mit  $G = G_{\text{CBVP}}(T)$ , wo Satz 3.2.2 eine entsprechende  $C^1$ -Lösung liefert. Das Problem dabei ist, daß die Grenze  $[x = \gamma_{\text{links}}(t)]^7$  charakteristisch ist, also  $\tilde{Z} \equiv 0$  auf  $\gamma_{\text{links}}$  jedenfalls nicht mit Lemma 4.3.1 erreicht werden kann<sup>8</sup>. Das Verschwinden von  $\tilde{Z}$  auf der Grenze kann man aber (jedenfalls in unserem Anwendungsfall mit nur einer nichttrivialen Eckcharakteristik) durch folgenden Hilfssatz erreichen.

**Lemma 4.3.2** *Sei  $(u^{\text{IVP}}, v^{\text{IVP}})$  auf  $G_{\text{IVP}}$  eine  $C^1$ -Lösung von (4.20) mit  $\pm\lambda_{\pm} > 0$ , wobei  $(\hat{Z}, \tilde{Z})$  aus (4.15, 4.16) verschwinden möge. Sei ferner  $(u^{\text{CBVP}}, v^{\text{CBVP}})$  auf  $G_{\text{CBVP}}$  eine  $C^1$ -Lösung desselben System mit  $(u, v \setminus v_+)^{\text{IVP}} = (u, v \setminus v_+)^{\text{CBVP}}$  auf der Grenze  $\gamma_{\text{links}} = G_{\text{IVP}} \cap G_{\text{CBVP}}$ . Die Zwangsbedingung  $\tilde{Z} = 0$  werde propagiert. Dann verschwindet  $(\hat{Z}, \tilde{Z})$  auch in  $G_{\text{CBVP}}$ .*

**Beweis** In (4.15), der Definition von  $\hat{Z}$ , taucht  $v = (v_-, v_+)$  gar nicht auf. Also ist  $\hat{Z}$  als Funktion von  $u$  stetig und wird nach Voraussetzung propagiert. Zu zeigen bleibt  $\tilde{Z}|_{\gamma_{\text{links}}} = 0$ , weil dann Satz 4.2.2 mit  $G = G_{\text{CBVP}}$  angewandt werden kann. Auf  $\gamma_{\text{links}}$  mit  $\gamma'_{\text{links}}(t) = \lambda_+(t, \gamma_{\text{links}}(t), u(t, \gamma_{\text{links}}(t)))$  stimmen insbesondere  $\tilde{u}^{\text{IVP}}$  und  $\tilde{u}^{\text{CBVP}}$  überein. Deren Ableitung ist der Grenzwert der (grenzparallelen) Ableitungen sowohl in  $(G_{\text{CBVP}} \setminus \gamma_{\text{links}})$  als auch in  $(G_{\text{IVP}} \setminus \gamma_{\text{links}})$ :

$$\partial_t \tilde{u}^{\text{IVP}} + (\lambda_+ \circ \bar{u}) \cdot \partial_x \tilde{u}^{\text{IVP}} = \partial_t \tilde{u}^{\text{CBVP}} + (\lambda_+ \circ \bar{u}) \cdot \partial_x \tilde{u}^{\text{CBVP}} \quad (4.27)$$

---

<sup>7</sup> $\gamma_{\text{links}}$  gemäß Definition 3.2.3 auf Seite 88

<sup>8</sup>Wäre (4.23) wohldefiniert, wäre dadurch  $v$  auf der Grenze allein durch  $u$  bestimmbar im Widerspruch zu der Tatsache, daß  $v(t, \gamma(t))$  durch Integration entlang der Grenze mit Anfangswert  $v(0+, 0) = \phi_+(0)$  bestimmt ist.

Wegen  $\partial_t \tilde{u} = (\mathbf{S} \circ \bar{u})^{-1} \cdot v$  gilt andererseits

$$\partial_t \tilde{u}^{\text{IVP}} - \partial_t \tilde{u}^{\text{CBVP}} = (\mathbf{S} \circ \bar{u})^{-1} \cdot (v^{\text{IVP}} - v^{\text{CBVP}}) \quad (4.28)$$

und somit ( (4.27) nach  $\partial_x \tilde{u}^{\text{CBVP}}$  auflösen)

$$\begin{aligned} \partial_x \tilde{u}^{\text{CBVP}} &= \partial_x \tilde{u}^{\text{IVP}} + \frac{1}{\lambda_+} \mathbf{S}^{-1} \cdot (v^{\text{IVP}} - v^{\text{CBVP}}) \\ &= \mathbf{A}^{-1} \left[ \tilde{b} - \mathbf{S}^{-1} v^{\text{IVP}} \right] + \mathbf{S}^{-1} \cdot \frac{1}{\lambda_+} \cdot (v^{\text{IVP}} - v^{\text{CBVP}}), \end{aligned}$$

wobei die zweite Gleichung aus der Voraussetzung  $\tilde{Z}|_{G_{\text{IVP}}} = 0$  folgt. Aus dieser Darstellung von  $\partial_x \tilde{u}^{\text{CBVP}}$  folgt unter Verwendung von  $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{\Lambda}^{-1}$  die Behauptung  $\tilde{Z}|_{\gamma_{\text{links}}} = 0$  in der Form  $\partial_x \tilde{u}^{\text{CBVP}} = \mathbf{A}^{-1} \left[ \tilde{b} - \mathbf{S}^{-1} v^{\text{CBVP}} \right]$  auf  $\gamma_{\text{links}}$ , weil

$$\lambda_+^{-1} (v^{\text{IVP}} - v^{\text{CBVP}}) = \mathbf{\Lambda}^{-1} (v^{\text{IVP}} - v^{\text{CBVP}})$$

wegen  $v^{\text{IVP}} - v^{\text{CBVP}} = (0, \dots, 0, v_+^{\text{IVP}} - v_+^{\text{CBVP}})^T$  gilt.  $\square$

## 4.4 Anwendung auf unser System

In diesem Abschnitt geht es um die konkrete Anwendung der im vorigem Abschnitt allgemein beschriebenen Diagonalisierung und der darauf beruhenden Existenz- und Eindeutigkeitsätze. Die konkrete Diagonalgestalt ist für die entsprechende numerische Behandlung notwendig. Außerdem ist das Verhalten der Gleichungen in der Nähe des Sternzentrums von Interesse, wo die  $(t, r)$ -Koordinaten singulär werden. Dazu begründe ich auf Seite 115, daß unser System dank der Regel von l'Hospital nur hebbare Singularitäten enthält.

Für die Theorie nützt dies aber wenig, da meine Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen stetige Differenzierbarkeit bis einschließlich Rand voraussetzen. Um dennoch die eindeutige Existenz einer  $C_L^1$ -Lösung in der Nähe von  $[r = 0]$  zu erhalten,

kann ich aber genau wie Kind [Kind92] auf die Arbeiten von Rendall [Rend92] zurückgreifen, der insbesondere für kugelsymmetrische Einsteinsche Feldgleichungen die notwendigen Ergebnisse bereitstellt, indem er mit einem regulären 4D-Koordinatensystem arbeitet. Dann kennt man in der Nähe des Zentrums die Lösung, also insbesondere auf  $[r = r_\varepsilon]$ , wobei  $r_\varepsilon > 0$  hinreichend klein sei.

Zur Berechnung der kugelsymmetrischen Raumzeit mit idealer Flüssigkeit bleibt dann Problem 3.2.1 mit  $x_{\text{links}} = r_\varepsilon$  und  $x_{\text{rechts}} = r_b$  zu lösen, sobald die Einstein-Gleichungen diagonalisiert und zentriert sind. Letzteres bedeutet, daß die Anfangsdaten  $u_0$  zum Verschwinden gebracht werden, indem man das Differentialgleichungssystem nicht für die Unbekannten  $u$ , sondern für  $u^* := u - u_0$  löst. (siehe Abschnitt 4.4.5)

#### 4.4.1 Zwangsbedingungen

Das System der Evolutionsgleichungen (2.25) soll nun diagonalisiert werden. Die zugehörigen Zwangsbedingungen (2.26) müssen also auf die Form (4.15) gebracht werden. Dazu werden

$$Z_R := R_r - \partial_r R \quad \text{und} \quad Z_M := M_r - \partial_r M \quad (4.29)$$

definiert unter Verwendung von

$$R_r := e^{\lambda/2} \Gamma \quad \text{und} \quad M_r := -8\pi \varrho R R_r - \frac{M-1}{R} R_r. \quad (4.30)$$

Auf Seite 32 wurde ausgeführt, daß zunächst die Propagation der ersten Zwangsbedingung  $\partial_x R \equiv e^{\lambda/2} \Gamma$  zu zeigen ist, damit das Skalarfeld  $m$  aus (2.26) wohldefiniert ist. Dann läßt sich die Propagation der zweiten Zwangsbedingung  $M - 1 + \frac{2m}{R} \equiv 0$  zeigen. Diese Mehrstufigkeit ist in (4.15) bzw. (4.29) nicht vorgesehen. Die Übersetzung von (2.26) in (4.15) erfolgt daher nicht auf der Anfangsfläche  $[t = t_0(x)]$ , sondern

auf  $G^\perp$ . Man benötigt daher zwei Lemmata. Eines, das für eine hinreichend glatte Lösung der ersten beiden Gleichungen von (2.25) garantiert, daß  $(Z_R, Z_M)$  aus (4.29) auf  $G^\perp$  genau dann verschwindet, wenn (2.26) auf  $G^\perp$  gilt. Diese Aussage steht als Lemma 8.2.1 im Anhang auf Seite 240. Ein zweiter Hilfssatz muß sicherstellen, daß  $\hat{Z} = 0$  propagiert wird für  $\hat{Z} = (Z_R, Z_M)$ . Dieser heißt Lemma 8.2.2 und steht ebenfalls im Anhang.

Bei der Propagation der Zwangsbedingungen  $\hat{Z} = 0$  werden außerdem die Größen aus (4.16) für das zu betrachtende System (2.25) benötigt. Dieses wird daher in der Form (2.35) geschrieben. Dann ist  $\tilde{Z} = (Z_\varrho, Z_U)$ , wobei gemäß (4.16)

$$Z_\varrho := \varrho_r - \partial_r \varrho \quad \text{und} \quad Z_U := U_r - \partial_r U \quad (4.31)$$

mit

$$\varrho_r := \frac{e^\phi \nu - \partial_t U}{\beta/\gamma} \quad \text{und} \quad U_r := -\frac{e^\phi (p + \varrho) \frac{2U}{R} + \partial_t \varrho}{\beta\gamma}. \quad (4.32)$$

zu setzen sind.

#### 4.4.2 Das $(t, r)$ -System in Diagonalgestalt

Zum Diagonalisieren des Systems (2.25) bzw. (2.35) gemäß Satz 4.2.2 sind dessen Voraussetzungen zu zeigen. Dazu wurde im vorangehenden Abschnitt die Propagation von  $\hat{Z} = 0$  im Sinne von Definition 4.2.1 bewiesen.

Der Satz erfordert weiter Anfangsdaten, welche die Zwangsbedingungen erfüllen. Wie man solche Vorgabedaten erhält, gebe ich auf Seite 116 konkret an.

Mit den auf Seite 34 definierten Matrizen gilt  $\mathbf{AS} = \mathbf{SA}$ .



Das diagonalisierte Gleichungssystem lautet dann

$$\begin{aligned}
 \partial_t R &= e^\phi U \\
 \partial_t M &= -2e^\phi U \nu \\
 \partial_t \varrho &= \frac{v_1 - v_2}{2} \\
 \partial_t U &= \frac{v_1 + v_2}{2q} \\
 \partial_t v_1 + \beta \partial_r v_1 &= g_1 \\
 \partial_t v_2 - \beta \partial_r v_2 &= g_2
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

mit

$$\begin{aligned}
 g_1 &:= \tilde{g} + 2e^\phi (p + \varrho) \frac{R_t U - R U_t}{R^2} - (\beta_t \gamma + \beta (\gamma_t - \gamma_r)) U_r \\
 g_2 &:= \tilde{g} - 2e^\phi (p + \varrho) \frac{R_t U - R U_t}{R^2} + (\beta_t \gamma + \beta (\gamma_t - \gamma_r)) U_r \\
 \tilde{g} &:= -\beta_t \varrho_r + \frac{e^\phi \nu \varrho_t}{\Gamma_s} + e^\phi \frac{p + \varrho}{\Gamma_s} \left[ \frac{M_t}{2R} - \nu \frac{\Gamma_t}{\Gamma} + \left( \nu - \frac{M-1}{R} \right) \frac{R_t}{R} \right. \\
 &\quad \left. - \left( 4\pi R s^2 + \frac{\nu p''}{2s^2} \right) \varrho_t \right],
 \end{aligned}$$

wobei in den rechten Seiten und in den zusätzlichen Abkürzungen

$$\begin{aligned}
 \beta_t &:= \beta \left[ \frac{2R}{R_t} + \varrho_t \left( \frac{1-s^2}{p+\varrho} + \frac{p''(\varrho)}{2s^2} \right) \right], \\
 \Gamma_t &:= \frac{M_t/2 + U U_t}{\Gamma}, \quad \Gamma_r := \frac{M_r/2 + U U_r}{\Gamma}, \\
 \gamma_t &:= -\gamma \frac{\Gamma_t}{\Gamma} + \frac{\varrho_t}{\Gamma_s} \left( 1 + s^2 + \frac{p''(\varrho)}{2\phi'(\varrho)} \right), \\
 \gamma_r &:= -\gamma \frac{\Gamma_r}{\Gamma} + \frac{\varrho_r}{\Gamma_s} \left( 1 + s^2 + \frac{p''(\varrho)}{2\phi'(\varrho)} \right),
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

die Ausdrücke  $R_t$ ,  $M_t$ ,  $\varrho_t$  und  $U_t$  durch die entsprechenden rechten Seiten aus (4.33) zu ersetzen sind.

*Singularitäten durch verschwindende Nenner*

In dieser Form der Gleichungen bleibt deutlich, daß für  $(p + \varrho)$ ,  $\Gamma$ ,  $s > 0$  kein Nenner verschwindet, solange  $R$  positiv ist. ( $A'_\Sigma$

verschwindet auch mit Ordnung  $R^2$  im Zentrum). Aber auch im Zentrum können die Singularitäten hebbar sein, da jedem  $R$  im Nenner ein  $U, U_t$  oder  $M - 1$  im Zähler gegenübersteht. Wir haben zwar keinen Existenz- und Eindeigkeitssatz, dessen Beweis das Zentrum einschließt. Trotzdem hat das System eine eindeutige Lösung und diese ist so geartet, daß sogar entlang jeder Kurve, die ins Zentrum läuft, nach der Regel von l'Hospital einseitige Grenzwerte der rechten Seiten von (4.33) existieren. In der numerischen Praxis könnte man daher die Lösung mit Hilfe der in charakteristischen Richtung angewandten Regel von l'Hospital auch bei  $[r = 0]$  berechnen.

#### Anfangsdaten

Die Anfangsdaten  $\mathbf{u}_0 = (R_0, M_0, \varrho_0, U_0)$ , die auf der Anfangsfläche  $[t = t_0(x)]$  angenommen werden sollen, könnten etwa aus einer numerischen Rechnung stammen. Gibt man selbst Daten  $\mathbf{u}_0$  vor, so müssen dabei die Zwangsbedingungen (2.26) erfüllt werden. Dann wird  $\mathbf{v}_0$  konsistent zu  $\mathbf{v} = \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}_t$  gesetzt:

$$\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} 1 & \gamma(0, \cdot) \\ -1 & \gamma(0, \cdot) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u}_{0t} \quad (4.35)$$

mit

$$\mathbf{u}_{0t} := \begin{bmatrix} -e^{\hat{\phi}(\varrho_0)} (\hat{p}(\varrho_0) + \varrho_0) \frac{2U_0}{R_0} - (\beta\gamma)(0, \cdot) U_0' \\ e^{\hat{\phi}(\varrho_0)} \nu(0, \cdot) - (\beta/\gamma)(0, \cdot) \varrho_0' \end{bmatrix}.$$

Um die Existenz- und Eindeigkeitssätze anwenden zu können, müssen alle Terme des Systems (4.33) beschränkt bleiben. Ein Term der Form  $\frac{U}{R}$  bleibt aber nicht für alle Funktionen  $R$  mit  $\|R\| < \Omega$  beschränkt, sondern nur in einer hinreichend kleinen Umgebung um ein nirgends verschwindendes Anfangs- $R$ . Die einfachen Abschätzungen, um mit solchen Daten mathematisch sauber arbeiten zu können, führe ich in Abschnitt 4.4.5 durch.

### 4.4.3 Vorgabe der Randdaten

Am Sternrand  $[r = r_b]$  soll der Druck identisch verschwinden, also muß  $\varrho(\cdot, r_b) \equiv \varrho_b$  mit  $\varrho_b$  aus (2.3) gelten. Notwendig (und bei einer stetigen Lösung mit zulässigem Anfangswert  $\varrho_0(r_b) = \varrho_b$  auch hinreichend) ist also  $\partial_t \varrho(\cdot, r_b) \equiv 0$ . Dies wird wegen (4.20), d.h.

$$\begin{aligned} v_1 &= \partial_t \varrho + \frac{v^+ \varrho}{\Gamma_s} \partial_t U \\ v_2 &= -\partial_t \varrho + \frac{v^+ \varrho}{\Gamma_s} \partial_t U \end{aligned}$$

durch den rechten Randwert

$$v_2(t, x_{\text{rechts}}) = v_1(t, x_{\text{rechts}}) \text{ für alle } t \in [0, T] \quad (4.36)$$

und  $x_{\text{rechts}} = r_b$  realisiert.

Im Falle  $x_{\text{links}} = r_\varepsilon$  steht links eine fertige Lösung parat, wie in der Einleitung zu Abschnitt 4.4 auf Seite 112 ausgeführt wurde. Man kann also  $v_1(t, x_{\text{links}}) = (\partial_t \varrho + \gamma \partial_t U)(t, r_\varepsilon)$  setzen (mit  $\gamma$  aus (2.27)). Arbeitet man jedoch mit Zentrum  $[r = 0]$ , also  $x_{\text{links}} = 0$ , so läßt sich durch

$$v_1(t, x_{\text{links}}) = -v_2(t, x_{\text{links}}) \text{ für alle } t \in [0, T] \quad (4.37)$$

ein (wegen  $R_{|[r=0]} \equiv 0$  notwendiges) Verschwinden von  $\partial_t U$  im Zentrum ausdrücken.

### 4.4.4 Diagonales System in $(t^*, r^*)$ -Koordinaten

Im vorigen Abschnitt wurde das Diagonalsystem in  $(t, r)$ -Koordinaten erzeugt. Nun sollen Anfangsdaten auf der lichtartigen Anfangsfläche  $H := [t = B_H(r)]$  mit  $B_H$  aus (2.8) von Seite 21 vorgegeben werden. Mit der Koordinatentransformation (2.16) gilt für diese Anfangsfläche  $H = [t^* = 0]$ .

#### 4. Diagonalisierung

---

In der Nähe von  $H$  ist es wegen (2.37) aus Lemma 2.3.8 möglich, das diagonale System (4.33) in der Form

$$\begin{aligned}
 \partial_{t^*} R &= e^\phi U \\
 \partial_{t^*} M &= -2e^\phi U \nu \\
 \partial_{t^*} \varrho &= \frac{v_1 - v_2}{2} \\
 \partial_{t^*} U &= \frac{v_1 + v_2}{2q} \\
 \partial_{t^*} v_1 + \frac{\beta}{1 - \beta B'_H(r^*)} \partial_{r^*} v_1 &= \frac{g_1}{1 - \beta B'_H(r^*)} \\
 \partial_{t^*} v_2 - \frac{\beta}{1 + \beta B'_H(r^*)} \partial_{r^*} v_2 &= \frac{g_2}{1 + \beta B'_H(r^*)}
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

zu schreiben, indem (2.16) in (4.33) eingesetzt wurde und die Faktoren vor  $\partial_{t^*} v_i$  wegdividiert wurden.

Die Zwangsbedingungen lassen sich auch in  $(t^*, r^*)$ -Koordinaten ausdrücken. Ihr anfängliches Erfülltsein wird durch „zulässige“ Anfangsdaten im Sinne von Abschnitt 2.4.4 erzielt. Die Propagation von  $(Z_R, Z_M) = 0$  wird allein durch die ersten beiden Gleichungen gewährleistet, wie Lemma 8.2.2 zeigt. Die übrigen Zwangsbedingungen  $(Z_\varrho, Z_U) = 0$  werden gemäß Satz 4.2.2 propagiert, wenn die Anfangsdaten richtig gesetzt werden.

##### Randdaten

Die Randwertvorgabe wird durch die Koordinatentransformation (2.16) nicht betroffen, da  $r = r^*$  und  $\partial_t = \partial_{t^*}$  gelten. Man setzt also am Sternrand (4.36) und im Zentrum (4.37), sofern man nicht mit  $x_{\text{links}} = r_\varepsilon > 0$  arbeitet.

##### Anfangsdaten

Die Wahl zulässiger Anfangsdaten für die Grundunbekannten ist in Abschnitt 2.4.4 behandelt. Dort bekommt man Daten  $\mathbf{u}_0 := (R_H, M_H, \varrho_H, U_H)$ , aus denen  $\mathbf{v}_0$  vermöge Lemma 4.3.1

berechnet wird. Mit  $\gamma, s, \nu$  aus (2.27) und weil  $B'_H = e^{-\phi} = s/\beta$  wegen  $e^{\lambda/2} = 1$  auf  $H$  gilt, lautet (4.23) dann konkret

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 &= \mathbf{S} \left\{ \begin{bmatrix} -e^\phi (p + \varrho) \frac{2U}{R} \\ e^\phi \nu \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 & sq \\ s/\gamma & 1 \end{bmatrix}^{-1} \left[ \begin{pmatrix} \varrho'_H \\ U'_H \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -(p + \varrho) \frac{2U}{R} \\ \nu \end{pmatrix} \right] \right\} \\ &= e^\phi \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ -1 & \gamma \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} -(p + \varrho) \frac{2U}{R} \\ \nu \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. - s \begin{pmatrix} s & \gamma \\ 1/\gamma & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varrho'_H + (p + \varrho) \frac{2U}{R} \\ U'_H - \nu \end{pmatrix} \right\}, \end{aligned} \tag{4.39}$$

wobei  $(R, M, \varrho, U)$  durch  $\mathbf{u}_0(r)$  zu ersetzen ist. Weil eine  $C^1$ -Lösung von (4.38) auch eine  $C^1$ -Lösung von (4.33) ist, sind alle Voraussetzungen von Lemma 4.3.1 erfüllt. Auf  $H$  sind für zulässige Anfangsdaten  $\mathbf{u}_0$  mit dazu passendem  $\mathbf{v}_0$  aus (4.39) die Voraussetzungen des Diagonalisierungssatzes 4.2.2 erfüllt. Man bekommt also tatsächlich die gewünschte  $C^2$ -Lösung von (2.25), sofern eine  $C^1$ -Lösung von (4.38) gefunden ist.

#### 4.4.5 Anfangswert auf 0 zentrieren

Für die Theorie beschränken wir uns auf das Raumintervall  $[x_{\text{links}}, x_{\text{rechts}}]$  mit  $x_{\text{links}} = r_\varepsilon > 0$ , so daß keine singulären Terme in (2.25), (4.33) oder (4.38) auftauchen, wie im folgenden nachgewiesen wird. In der Nähe des Zentrums  $[r = 0]$  liege also eine  $C^2$ -Lösung von (2.25) vor, die für hinreichend kleines

#### 4. Diagonalisierung

---

$r_\varepsilon > 0$  einerseits  $v_1$ -Randwerte

$$(v_1)|_{[r=r_\varepsilon]} = \left( \partial_t \varrho + \frac{p + \varrho}{\Gamma} \partial_t U \right)|_{[r=r_\varepsilon]}$$

liefert und sich andererseits durch  $C^2$ -Funktionen

$$\mathbf{u}_0 := (R_0, M_0, \varrho_0, U_0)$$

so fortsetzen läßt, daß (2.26) auf  $t = 0$  oder  $t^* = 0$  gilt. Seien solche Vorgabedaten  $\mathbf{u}_0$  gegeben, was nach Abschnitt 2.4.4 möglich ist.

In den Existenz- und Eindeutigkeitsätzen dieses Abschnitts werden Lösungen innerhalb des Funktionenraumes

$$\mathcal{U}_\Omega := \{ \mathbf{u} \in C^0(G); \quad \|u_i\| < \Omega \} \quad (4.40)$$

gesucht. In unserem Differentialgleichungssystem tauchen aber Ausdrücke der Form  $\frac{2U}{R}$  auf, die nicht für alle  $(R, U) \in \mathcal{U}$  regulär sind. Man könnte daran denken, einen Funktionenraum zu definieren, in dem  $U$  und  $R$  in der Nähe von  $r = 0$  mit erster Ordnung (und  $M - 1$  mit zweiter Ordnung) verschwindet, um sogar in der Nähe des Zentrums eine Lösung zu finden. Dies ist aber zumindest kompliziert und nicht lohnend, da nach Rendall [Rend92] in der Nähe des Zentrums ohnehin eine Lösung existiert.

Die Regularität von  $\frac{U}{R}$  läßt sich zwar nicht mit  $(R, U) \in \mathcal{U}_\Omega$  erreichen, wohl aber mit  $(R^*, U^*) \in \mathcal{U}_\Omega$ , wobei

$$\mathbf{u}^*(t, r) := \mathbf{u}(t, r) - \mathbf{u}_0(r) \quad (4.41)$$

ist, denn dann ist  $\frac{U}{R} = \frac{U^* + U_0}{R^* + R_0}$  regulär, wenn  $\|R^*\| < R_{\min}$  mit  $R_{\min} := \frac{1}{2} \min R_0([r_\varepsilon, r_b])$  ist. Es gilt für solche  $R^*$  dann

$$R > 0 \text{ und } \left\| \frac{U}{R} \right\| < \frac{\|U\|}{R_{\min}} \in \mathbb{R}. \quad (4.42)$$

Weiterhin ist  $\|\varrho^*\| < \frac{1}{4}(\varrho_b - \varrho_{\min})$  zu fordern mit der Konstanten  $\varrho_{\min} := \min \{\varrho \geq 0; \hat{p}(\varrho) + \varrho \geq 0\} < \varrho_b$ , um

$$p + \varrho > 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{p + \varrho} < \frac{1}{\hat{p}(\tilde{\varrho}) + \tilde{\varrho}} \in \mathbb{R} \quad (4.43)$$

aus  $\varrho = \varrho^* + \varrho_0 \geq -\frac{1}{4}(\varrho_b - \varrho_{\min}) + \varrho_b > \frac{1}{4}(\varrho_b + \varrho_{\min}) =: \tilde{\varrho}$  folgern zu können. Schließlich gilt für alle  $\|U^*\| < U_{\min}$  mit  $U_{\min} := \frac{1}{2} \min |U_0(r_\varepsilon, r_b)|$  und  $\|M^*\| < \frac{1}{2}U_{\min}^2 =: M_{\min}$

$$\Gamma > 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{\Gamma} < \frac{\sqrt{2}}{|U_{\min}|} \in \mathbb{R} \quad (4.44)$$

wegen  $\Gamma^2 = M + U^2 > M_0 - \frac{1}{2}U_{\min}^2 + U_{\min}^2 \geq \frac{1}{2}U_{\min}^2 > 0$  und der Anfangsdatenwahl  $\Gamma_0 > 0$  und  $M_0 \geq 0$ .

Für  $u^* \in \mathcal{U}_\Omega$  mit

$$\Omega = \frac{1}{2} \min \left\{ R_{\min}, M_{\min}, \frac{1}{4}(\varrho_b - \varrho_{\min}), U_{\min} \right\} \quad (4.45)$$

sind wegen (4.42-4.44) alle Ausdrücke in (2.25) und (4.33) regulär. Durch evtl. Verkleinern von  $\Omega$  kann außerdem erreicht werden, daß auch alle Ausdrücke in (4.38) nicht nur regulär sind, sondern sogar mit Hilfe von a-priori bestimmten Konstanten abschätzbar. Darüberhinaus sind dann obere Schranken für  $1/\left(\|\beta\|_{|[x=x_{\text{links}}] \cup [x=x_{\text{rechts}}]}\right)$  mit  $\beta$  aus (2.27) und  $\left\| \frac{1 \pm \beta B'_{\mathbf{u}}}{\beta} \right\|_{|[x=x_{\text{links}}] \cup [x=x_{\text{rechts}}]}$  a priori bestimmt, so daß in allen Anwendungsfällen eine Konstante  $M^*$  mit den in Lemma 7.2.8 geforderten Eigenschaften a priori bestimmt ist.

Die Existenz- und Eindeigkeitssätze werden dann nicht auf diese  $u$ -Systeme, sondern auf  $u^*$ -Systeme angewandt, die durch (4.41) entstehen. Statt ein System

$$\partial_t u + \mathbf{A}(u) \cdot \partial_r u = \mathbf{b}(u) \quad (4.46)$$

zu lösen, sucht man also eine Lösung  $\mathbf{u}^*$  von

$$\partial_{t^*} \mathbf{u} + \mathbf{A}^*(\mathbf{u}^*) \cdot \partial_{r^*} \mathbf{u} = \mathbf{b}^*(\mathbf{u}^*), \quad (4.47)$$

wobei

$$\mathbf{A}^* : G \times [-\Omega, \Omega]^4 \rightarrow \mathbb{R}^{4 \times 4}, (t, r, \mathbf{u}^*) \mapsto \mathbf{A}(t, r, \mathbf{u}^* + \mathbf{u}_0(r))$$

und  $\mathbf{b}^* : G \times [-\Omega, \Omega]^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  mit

$$\mathbf{b}^*(t, r, \mathbf{u}^*) := \mathbf{b}(t, r, \mathbf{u}^* + \mathbf{u}_0(r)) - \mathbf{A}^*(t, r, \mathbf{u}^*) \cdot \mathbf{u}'_0$$

gesetzt wird. Für jede  $C^k$ -Lösung  $\mathbf{u}^*$  von (4.47), die ein entsprechender Existenzsatz liefert, ist dann

$$\mathbf{u}(t, r) := \mathbf{u}^*(t, r) + \mathbf{u}_0(r)$$

eine  $C^k$ -Lösung von (4.46), sofern  $\mathbf{u}_0 \in C^k \cap C^2$  ist.

#### 4.4.6 Zusammenfassung der Ergebnisse

Das Evolutionsgleichungssystem (2.25) kann nun in verschiedenen Situationen untersucht werden. Dabei sind insgesamt 6 Kombinationen aus Anfangsflächen **a)** und **b)** sowie Eckbedingungsstufen **i)** bis **iii)** möglich.

**Satz 4.4.1** *In Zentrumsnähe, etwa auf  $[0, T_0] \times [0, 2r_\varepsilon]$ , sei eine  $C_L^2$ -Lösung  $\mathbf{u}_\varepsilon$  von (2.25) gegeben. Auf der Anfangsfläche  $[t = t_0(r)]$  mit*

**a)**  $t_0 \equiv 0$  oder

**b)**  $t_0 = B_H$  aus (2.8)



sei eine Fortsetzung  $\mathbf{u}_0 = (R_0, M_0, \varrho_0, U_0) \in C_L^2([r_\varepsilon, r_b])$  von  $\mathbf{u}_\varepsilon$  so gegeben, daß die Zwangsbedingungen (2.26) für  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$  erfüllt<sup>9</sup> werden und folgende Ungleichungen gelten

$$\begin{aligned} R_0 &> 0 \text{ auf } ]0, r_b], \\ \Gamma_0 &:= \sqrt{M_0 + U_0^2} > 0, \\ M_0 &> 0 \text{ und } \varrho_0 > \varrho_b \text{ auf } ]0, r_b[ . \end{aligned}$$

Die in (2.25) eingesetzten Anfangsdaten mögen zu  $\varrho(\cdot, r_b) \equiv \varrho_b$  so gut passen, daß die Eckbedingung(en)

- i)** 0. Ordnung (d.h.  $\varrho(0, r_b) = \varrho_b$ ) oder
- ii)** 0. und 1. Ordnung (d.h. auch  $\partial_t \varrho(0, r_b) = 0$ ) oder
- iii)** 0. und 1. und 2. Ordnung (d.h. auch  $\partial_{tt} \varrho(0, r_b) = 0$ )

erfüllt sind. Dann hat das System (2.25) mit Anfangswerten  $\mathbf{u}(r, t_0(r)) = \mathbf{u}_0(r)$ , linken Randwerten  $\mathbf{u}(\cdot, r_\varepsilon) = \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, r_\varepsilon)$  und rechtem Randwert  $\varrho(\cdot, r_b) \equiv \varrho_b$  genau eine Lösung in der Nähe von  $[t = t_0(r)]$ . Sei  $\gamma_{\text{rechts}}$  die vom Sternrand einlaufende Grenzcharakteristik im Sinne von Definition 3.2.3. Seien weiter

$$G_{\text{IVP}^*} := \{(t, r) ; 0 \leq t \leq T, r_\varepsilon \leq r \leq \gamma_{\text{rechts}}(t)\}$$

und

$$G_{\text{CBVP}^*} := \overline{G(T)} \setminus G_{\text{IVP}^*} .$$

Dann ist die Lösung  $\mathbf{u}$  sowohl auf  $G_{\text{IVP}^*}$  als auch auf  $G_{\text{CBVP}^*}$  zweimal Lipschitz-stetig differenzierbar. Außerdem gilt für Ab-

---

<sup>9</sup>Soweit (2.26) Zeitableitungen enthält, sind diese dabei durch die rechte Seite von (2.25) zu ersetzen

#### 4. Diagonalisierung

---

leitungen in zu  $\gamma_{\text{rechts}}$  transversaler Richtung

$\mathbf{u} \in C_L^0 \setminus C^1$  im Fall **i**), d.h. Knick in  $\varrho$  u. Sprung in  $\mathbf{u}_t$

$\mathbf{u} \in C_L^1 \setminus C^2$  im Fall **ii**), d.h. Knick in  $\mathbf{u}_t$

$\mathbf{u} \in C_L^2$  im Fall **iii**), d.h. differenzierbares  $\mathbf{u}_t$  .

**Beweis** Statt (2.25) direkt zu lösen, soll (4.20) behandelt werden. Der Satz 4.2.2 ist anwendbar, denn (2.25) ist von der Form (4.13) mit propagierter Zwangsbedingung (4.15), wie Lemma 8.2.2 zeigt. Diese Zwangsbedingungen  $\tilde{Z} = (Z_R, Z_M) = 0$  sind dabei nach Lemma 8.2.1 mit Misners Zwangsbedingungen identisch und somit nach Voraussetzung anfänglich erfüllt. Nach dem Diagonalisierungssatz 4.2.2 genügt es daher, eine Lösung  $\mathbf{w}_{\text{Diago}} = (R, M, \varrho, U, v_1, v_2)$  von (4.33) mit (4.21) zu finden, wobei (4.33) die zu (2.25) gehörige konkrete Gestalt von (4.20) ist.

Anfangswerte, für die außerdem  $\tilde{Z} = (Z_\varrho, Z_U)$  verschwindet, erhält man mit Lemma 4.3.1 aus (4.22) im Falle  $t_0 \equiv 0$  (bzw. aus (4.39) im Falle  $t_0 = B_H$ ).

Randwerte an  $v_2$ , die einer Festlegung von  $\varrho_t(\cdot, r_b) \equiv 0$  entsprechen, werden gemäß Abschnitt 4.4.3 durch (4.36) festgelegt.

Im Falle **b**) führt man die Transformation (2.16) durch, so daß dann die Lösung

$$\mathbf{w}_{\text{Diago}, t_0} \quad \text{von (4.38) im Falle } t_0 = B_H$$

$$\text{bzw. } \mathbf{w}_{\text{Diago}, t_0} = \mathbf{w}_{\text{Diago}} \quad \text{von (4.33) im Falle } t_0 \equiv 0$$

mit Anfangsdaten  $\mathbf{w}_{\text{Diago}, t_0}(0, \cdot) = (\mathbf{w}_{\text{Diago}, t_0})_0$  zu suchen ist.

Mit  $\mathbf{u} := \mathbf{w}_{\text{Diago}, t_0}$  wird eine Zentrierung gemäß Abschnitt 4.4.5 durchgeführt. Da das System für  $\mathbf{u}$ , nämlich (4.38) bzw. (4.33), die Form (4.46) mit  $\mathbf{A} = \mathbf{diag}\{0, \dots, 0, a_+, a_-\}$

und

$$a_+(0, x, \mathbf{u}_0(x)) > 0 > a_-(0, x, \mathbf{u}_0(x)) \quad (4.48)$$

für  $\mathbf{u}_0 = (\mathbf{u}_{\text{Diago}, t_0})_0(0, \cdot)$  hat, behält auch das zentrierte System aus (4.47) diese Gestalt (3.7), dessen zugehörige Lösung  $\mathfrak{w}_{\text{Diago}, t_0, \text{zentriert}}$  sich nun mit den Sätzen aus Abschnitt 3.2 bzw. Abschnitt 3.3 gewinnen läßt. Weil die linken Randwerte und die Anfangswerten in der linken Ecke entstanden sind durch Restriktion einer  $C_L^2$ -Lösung  $u_\varepsilon$ , der eine  $C_L^1$ -Lösung  $\mathfrak{w}_\varepsilon$  entspricht, liegen am linken Rand  $C_L^1$ -Verhältnisse wie in Satz 3.3.1 vor. In der Nähe des rechten Randes verwendet man dagegen

Satz 3.3.2 im Falle **i)** (d.h. Sprung in  $\mathfrak{v}$ )

Satz 3.2.4 im Falle **ii)** (d.h. Knick in  $\mathfrak{v}$ )

Satz 3.3.1 im Falle **iii)** (d.h. differenzierbares  $\mathfrak{v}$ ),

um eine eindeutig bestimmte Lösung  $\mathfrak{w}_{\text{Diago}, t_0, \text{zentriert}}$  von (3.7) in der oben angegebenen Gestalt zu gewinnen. Diese ist sowohl in  $G_{\text{IVP}^*}$  als auch in  $G_{\text{CBVP}^*}$  Lipschitz-stetig differenzierbar.

Dieselbe Differentiationsordnung ergibt sich nach der Rückzentrierung (und ggf. der Rücktransformationen von (2.16)) für  $\mathfrak{w}_{\text{Diago}, t_0}$  und  $\mathfrak{w}_{\text{Diago}}$ .

Für das Gebiet  $G_{\text{IVP}^*}$  überführt Satz 4.2.2 die eindeutig bestimmte  $C_L^1$ -Lösung  $\mathfrak{w}_{\text{Diago}}$  von (4.33) in eine eindeutig bestimmte  $C_L^2$ -Lösung  $u$  von (2.25) mit  $Z := \left( \hat{Z}, \tilde{Z} \right) \equiv 0$  auf  $G_{\text{IVP}^*}$ . Lemma 4.3.2 stellt keine Differenzierbarkeitsanforderungen in zu  $\gamma_{\text{rechts}}$  transversaler Richtung und rettet daher in allen Fällen **i)** bis **iii)** die Zwangsbedingungen  $Z \equiv 0$  über die (charakteristische) Grenze  $\gamma_{\text{rechts}}$  hinweg. In  $G_{\text{CBVP}^*}$ , wo somit  $Z$  anfänglich verschwindet und außerdem  $\mathfrak{w}_{\text{Diago}} \in C_L^1$  ist, liefert wieder Satz 4.2.2 die eindeutige  $C_L^2$ -Lösung von (2.25).

#### 4. Diagonalisierung

---

Für die Differenzierbarkeitsordnungen in zu  $\gamma_{\text{rechts}}$  transversaler Richtung gelten dabei die Behauptungen für die Lösung  $\mathbf{u} = (R, M, \varrho, U)$  von (2.25).  $\square$

##### *Umkehr der Zeitrichtung*

Entsprechende Ergebnisse erhält man in Richtung negativer Zeitorientierung. Dazu wendet man die Sätze auf die zeitliche Umkehr der Systeme (4.33) oder (4.38) an, welche entstehen, indem die rechten Seiten und alle Koeffizienten vor Raumableitungen (Eigenwerte) negiert werden. Im Falle **b)** ist dann die Anfangsfläche  $t_0 = -B_H$  mit  $B_H$  aus (2.8).

## 4.5 Anwendungsbeispiel: 1-D Gasdynamik

Anhand eines Beispiels aus der klassischen Gasdynamik wird nun mein Verfahren zur Diagonalisierung eines quasilinearen Systems partieller Differentialgleichungen hyperbolischen Typs in zwei unabhängigen Unbekannten eingesetzt.

Dieser Abschnitt soll unabhängig von den relativistischen Ausführungen dieser Arbeit lesbar sein. Deshalb habe ich hier beispielsweise den in der Relativitätstheorie allgemein bekannten Begriff der Zwangsbedingung erläutert (vgl. Definitionen 4.5.6f).

### 4.5.1 Betrachtete Gleichungen

#### *Eulersche Betrachtungsweise in beliebigen Koordinaten*

In der Hydrodynamik ist die Eulersche Betrachtungsweise üblich, bei der die Stömung bezüglich eines ortsfesten Koordinatensystems beschrieben wird. Das für ein reibungsfreies, kompressibles Gas zu betrachtende Gleichungssystem besteht aus folgenden drei Gleichungen: der Kontinuitätsgleichung (Massenerhaltungssatz), der vektoriellen Bewegungsgleichung (Euler-Gleichungen, Impulserhaltungssatz) und der Energiebilanzgleichung. Es lautet in von den (Raum-)Koordinaten unabhängiger Schreibweise unter Verzicht auf äußere Kräfte und Wärmeaustausch

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) &= 0 \\ \partial_t \mathbf{u} + \frac{1}{2} \operatorname{grad}(|\mathbf{u}|^2) - \mathbf{u} \times \operatorname{rot} \mathbf{u} &= -\frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} p \\ \partial_t \left( e + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) &= 0, \end{aligned}$$

wobei die Dichte  $\varrho$ , der Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{u}$ , der Druck  $p$  und die innere Energie  $e$  beteiligt sind.

*Symmetrie*

Die drei Möglichkeiten räumlicher Symmetrie, die zu eindimensionalen Gleichungen führen, werden nun mittels eines Parameters  $\nu \in \{0, 1, 2\}$  einheitlich behandelt. Die Raumkoordinate soll dabei stets  $\xi$  heißen. Durch  $\nu = 0$  wird ebene Symmetrie (Stömung nur in die  $x$ -Richtung eines kartesischen Koordinatensystems) mit Raumkoordinate  $\xi = x$  beschrieben. Durch  $\nu = 1$  (bzw.  $\nu = 2$ ) wird Zylindersymmetrie (bzw. Kugelsymmetrie) beschrieben, wobei dann die Raumkoordinate  $\xi$  den Abstand zur Symmetrieachse (bzw. zum Zentrum) mißt.

*1-D Euler-Gleichungen*

Für die Funktionen  $\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{S}$  von  $(\bar{t}, \xi)$ , welche Dichte, Geschwindigkeit in  $\xi$ -Richtung und Entropie beschreiben, lauten die eindimensionalen Gleichungen der Gasdynamik dann

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{t}}\bar{\rho} + \bar{u} \cdot \partial_{\xi}\bar{\rho} + \bar{\rho} \cdot \partial_{\xi}\bar{u} &= -\frac{\nu\bar{\rho}\bar{u}}{\xi} \\ \partial_{\bar{t}}\bar{u} + \bar{u} \cdot \partial_{\xi}\bar{u} + \frac{1}{\bar{\rho}} \cdot \partial_{\xi}\bar{p} &= 0 \\ \partial_{\bar{t}}\bar{S} + \bar{u} \cdot \partial_{\xi}\bar{S} &= 0, \end{aligned} \tag{4.49}$$

wobei  $\bar{t}$  die Zeitkoordinate ist, und der Druck  $\bar{p}$  durch eine Zustandsgleichung

$$\bar{p} = \hat{p} \circ (\bar{\rho}, \bar{S}) \tag{4.50}$$

gegeben sei. Dabei ist also

$$\bar{p} : (\bar{t}, \xi) \mapsto \bar{p}(\bar{t}, \xi) = \hat{p}(\bar{\rho}(\bar{t}, \xi), \bar{S}(\bar{t}, \xi))$$

eine reellwertige Funktion zweier Veränderlicher, woraus sich  $\partial_{\xi}\bar{p} = \frac{\partial\bar{p}}{\partial\xi} \cdot \frac{\partial\hat{p}\circ(\bar{\rho},\bar{S})}{\partial\bar{\rho}} + \frac{\partial\bar{p}}{\partial\xi} \cdot \frac{\partial\hat{p}\circ(\bar{\rho},\bar{S})}{\partial\bar{S}}$  ergibt.

Dieses System hat 3 verschiedene Eigenwerte<sup>10</sup>, die nicht identisch verschwinden:  $\bar{u}$ ,  $\bar{u} + \bar{c}$ , und  $\bar{u} - \bar{c}$  mit der Schallgeschwindigkeit  $\bar{c} := \sqrt{\partial_{\bar{\rho}} \hat{p} \circ (\bar{\rho}, \bar{S})}$ . Mit dem in [Spiv79] angegebenen Verfahren ist dieses System daher unter Verdopplung der Anzahl der abhängigen Unbekannten diagonalisierbar.

*1-D Gleichungen in Lagrangescher Betrachtungsweise*

Schreibt man diese Gleichungen der eindimensionalen Gasdynamik in mitschwimmenden (Lagrangeschen) Koordinaten  $(t, q)$ , so erhält man das System

$$\begin{aligned}
 \partial_t \varrho + x^\nu \cdot \varrho^2 \cdot \partial_q u &= -\frac{\nu \varrho u}{x} \\
 \partial_t u + x^\nu \cdot \partial_q p &= 0 \\
 \partial_t S &= 0 \\
 \partial_t x &= u
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

für die Funktionen  $\varrho, u, S$  und  $x$ <sup>11</sup>, wobei  $\xi = x(t, q)$  der Ort eines Teilchens mit Namen<sup>12</sup>  $q$  zum Zeitpunkt  $\bar{t} = t$  ist. Dabei ist der Druck  $p = \hat{p} \circ (\varrho, S)$  wieder durch die Druckfunktion  $\hat{p}$  aus (4.50) gegeben. Dieses System hat die vier Eigenwerte 0, 0

<sup>10</sup>Damit sind die Eigenwerte der vor dem Vektor der Raumableitungen

stehenden Matrix  $\begin{bmatrix} \bar{u} & \bar{\rho} & 0 \\ \frac{1}{\bar{\rho}} \partial_{\bar{\rho}} \hat{p} & \bar{u} & \frac{1}{\bar{\rho}} \partial_S \hat{p} \\ 0 & 0 & \bar{u} \end{bmatrix}$  gemeint.

<sup>11</sup>Bei ebener Symmetrie  $\nu = 0$  könnte man geneigt sein, die Gleichung für  $x$  wegzulassen, weil  $x$  in den verbleibenden drei Gleichungen nicht vorkommt. Die Berechnung von  $x$  ist aber für den Rückweg zu einer Darstellung in ortsfesten Koordinaten notwendig.

<sup>12</sup>Mathematisch gesehen kann das eine beliebige monotone Benennung sein. Damit für (4.51) aber die Transformation zu den Euler-Gleichungen gelingt, muß die zwischen  $\xi = 0$  und  $\xi = r$  eingeschlossene Masse  $\hat{q}(r)$  zur Benennung eingesetzt werden (siehe auch Seite 140). Dadurch ist  $x_0 := x(0, \cdot)$  die Umkehrfunktion der Masse  $\hat{q}$

#### 4. Diagonalisierung

---

und  $\pm\sqrt{\partial_{\varrho}\hat{p}\circ(\varrho, S)}\cdot\varrho\cdot x^{\nu}$  und ist somit nicht nach dem bekannten Verfahren (vgl. [Spiv79]) diagonalisierbar, wohl aber mit meiner Methode, wie im Abschnitt 4.5.3 ab Seite 141 ausgeführt wird.

#### 4.5.2 Koordinatentransformation mit Zwangsbedingung

*Ergebnisse zur Transformation mit Zwangsbedingungen*

**Satz 4.5.1** *Es gilt*

*„Jede Lösung der Eulergleichungen (4.49) läßt sich  
eindeutig in eine Lösung der Lagrangeschen  
Gleichungen (4.51) überführen und umgekehrt.“*

*genau dann, wenn man zu den Lagrangeschen Gleichungen  
noch die Gleichung*

$$\partial_q x - \frac{1}{x^{\nu}\varrho} = 0 \quad (4.52)$$

*hinzufügt.*

Physikalisch entspricht (4.52) der Massenerhaltung, wie unter der Überschrift „Physikalische Interpretation“ ab Seite 140 dargelegt wird. Der Beweis von Satz 4.5.1 steht auf Seite 133.

**Satz 4.5.2** *Die Lösung der Euler-Gleichungen  $(\bar{\varrho}, \bar{u}, \bar{S})$  bzw. die Lösung der Lagrangeschen Gleichungen  $(\varrho, u, S, x)$  wird üblicherweise durch folgende Anfangswertaufgabe eindeutig festgelegt.*

*Euler-Gleichungen (4.49) für  $(\bar{\varrho}, \bar{u}, \bar{S})$  abh. von  $(\bar{t}, \xi)$*

*Anfangswerte:  $(\bar{\varrho}, \bar{u}, \bar{S})|_{\bar{t}=0} = (\bar{\varrho}_0, \bar{u}_0, \bar{S}_0)$*



bzw.

Langrange-Gl. (4.51) für  $(\varrho, u, S, x)$  abh. von  $(t, q)$

Anfangswerte:  $(\varrho, u, S, x)|_{t=0} = (\varrho_0, u_0, S_0, x_0)$  .

Jede Lösung der Lagrangeschen Anfangswertaufgabe läßt sich eindeutig in eine Lösung der Eulerschen Anfangswertaufgabe überführen (und umgekehrt), falls für die Lagrangeschen Anfangswerte

$$\partial_q x_0 - \frac{1}{x_0^\nu \varrho_0} = 0 \quad (4.53)$$

**gilt. Die Langrangeschen Anfangswerte sind nicht frei vorgebar, sondern müssen (4.53) erfüllen. Dagegen sind die Eulerschen Anfangswerte frei vorgebar.**

Der **Beweis** ergibt sich aus Satz 4.5.1 in Verbindung mit folgendem

**Satz 4.5.3** a) Die Gleichung (4.53) ist die zusätzliche Gleichung (4.52) aus Satz 4.5.1 ausgewertet in  $t = 0$ .

b) Für jede Lösung der Lagrangeschen Gleichungen (4.51) ist die zusätzliche Bedingung (4.52) **automatisch erfüllt**, wenn dies zur Zeit  $t = 0$  der Fall ist, d.h. wenn (4.53) gilt.

Dieser Satz besagt zusammen mit der Tatsache, daß (4.53) die Wahl der Anfangswerte  $(\varrho_0, u_0, S_0, x_0)$  einschränkt, daß (4.52) eine **Zwangsbedingung** ist, was folgendes bedeutet. Hat man eine Lösung einer Anfangswertaufgabe zu den Zeitentwicklungsgleichungen (4.51), die (4.52) auf der Anfangsdatenfläche erfüllt, so folgt die Zwangsbedingung (4.52) auf dem ganzen Lösungsgebiet. Gehören Zwangsbedingungen zu

einem physikalischen Modell, so ist man also nicht an beliebigen Lösungen der Entwicklungsgleichungen interessiert, sondern man muß sich auf Lösungen zu solchen Anfangsdaten beschränken, welche die Zwangsbedingung erfüllen.

Der Begriff der Zwangsbedingung ist im Gegensatz zur Relativitätstheorie in den klassischen Ingenieurwissenschaften allenfalls in der Elektrodynamik<sup>13</sup> gebräuchlich.

Physikalisch (siehe Seite 140) entspricht die Zwangsbedingung (4.52) der Massenerhaltung.

**Definition 4.5.4** *Eine Zwangsbedingung  $Z = 0$  eines partiellen Differentialgleichungssystems ist durch eine Funktion  $Z$  gegeben, welche von den abhängigen und unabhängigen Unbekannten und daraus gebildeten Raumableitungen abhängen darf, wenn  $Z = 0$  propagiert wird. Außerdem sind Anfangswerte **nicht frei vorgebar**, sondern werden durch die Forderung „Anfangswerte so, daß  $Z = 0$  auf der Anfangsdatenfläche gilt für jede die Anfangswerte annehmende Lösung des Differentialgleichungssystems“ echt eingeschränkt.*

**Definition 4.5.5** *Man sagt,  $Z = 0$  wird propagiert, wenn  $Z = 0$  für jede Lösung der Zeitentwicklungsgleichungen im ganzen Lösungsgebiet gilt, sofern nur die Anfangsdaten  $Z = 0$  zur Anfangszeit garantieren.*

**Definition 4.5.6** *Eine Pseudo-Zwangsbedingung  $Z = 0$  ist durch eine Funktion  $Z$  gegeben, welche von den abhängigen und unabhängigen Unbekannten, daraus gebildeten Raumableitungen (oder Integralen) und gegebenen Funktionen (etwa den Anfangsdaten<sup>14</sup>) abhängen darf, wenn  $Z = 0$  propagiert wird.*

---

<sup>13</sup>Bei den Maxwell-Gleichungen lassen sich nämlich die Beziehungen  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$  und  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$  als Zwangsbedingungen ansehen.

<sup>14</sup>Das tritt in der Relativitätstheorie nicht auf.

Diese Formulierung ist etwas allgemeiner als die in Definition 4.2.1 auf Seite 105. Zum Diagonalisieren der Lagrangeschen Gleichungen (siehe Seite 141) benutze ich die echte Zwangsbedingung (4.52) und die Pseudo-Zwangsbedingung  $\partial_q S = S'_0$ , die für  $t = 0$  trivialerweise erfüllt ist und daher nicht die freie Vorgabe von  $S_0$  beeinträchtigt.

**Beweis von Satz 4.5.1** Der konstruktive Teil des Beweises ergibt sich aus dem folgenden Satz 4.5.7, der die Transformation der Lösungen enthält. Daß umgekehrt unter Verzicht auf (4.52) die andere Aussage nicht gelten kann, folgt grob gesagt daraus, daß die Gleichungen unterschiedlich viele unabhängige Unbekannte haben. Die Lagrange-Gleichungen (4.51) haben ohne (4.52) mehr Lösungen als die Euler-Gleichungen (4.49), da man den Euler-Gleichungen drei, den Lagrangeschen Gleichungen aber vier Anfangswerte vorgeben kann und die Lösung durch die Anfangswerte eindeutig bestimmt wird.  $\square$

**Satz 4.5.7** *Betrachtet werden die Anfangswertaufgaben*

*Euler-Gleichungen (4.49) für  $(\bar{\varrho}, \bar{u}, \bar{S})$  abh. von  $(\bar{t}, \xi)$*

$$\text{Anfangswerte: } (\bar{\varrho}, \bar{u}, \bar{S})|_{\bar{t}=0} = (\bar{\varrho}_0, \bar{u}_0, \bar{S}_0) \quad (4.54)$$

und

$$\text{Lagrange-Gl. (4.51) für } (\varrho, u, S, x) \text{ abh. von } (t, q) \quad (4.55)$$

$$\text{Anfangswerte: } (\varrho, u, S, x)|_{t=0} = (\varrho_0, u_0, S_0, x_0)$$

sowie die Hilfsfunktionen **Bahnlinie**  $\bar{x} : (\bar{t}, r) \mapsto \bar{x}_r(\bar{t})$ , wobei  $\bar{x}_r(\bar{t})$  für jedes  $r$  durch die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{d}{d\bar{t}} \bar{x}_r(\bar{t}) = \bar{u}(\bar{t}, \bar{x}_r(\bar{t})) \quad \text{mit} \quad \bar{x}_r(0) = r \quad (4.56)$$

#### 4. Diagonalisierung

---

definiert sei, und **Masse**  $r \mapsto \hat{q}(r)$  (von 0 bis  $r$  zur Zeit  $t = 0$ )

$$\hat{q}(r) := \int_0^r \hat{r}^\nu \hat{\varrho}_0(\hat{r}) \, d\hat{r} \quad \text{mit Umkehrfunktion } (\hat{q})^{-1}.$$

Dann läßt sich die Eulersche Anfangswertaufgabe überführen in die Lagrangesche Anfangswertaufgabe durch die Transformation

$$\begin{pmatrix} \bar{t} \\ \xi \end{pmatrix} = \mathcal{F} \begin{pmatrix} t \\ q \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} t \\ \bar{x}(t, (\hat{q})^{-1}(q)) \end{pmatrix}. \quad (4.57)$$

Hat man also eine Lösung  $(\bar{\varrho}, \bar{u}, \bar{S})$  von (4.54), so wird durch

$$(\varrho, u, S) : (t, q) \mapsto (\bar{\varrho}, \bar{u}, \bar{S})(t, \bar{x}(t, (\hat{q})^{-1}(q))) \quad ,$$

$x(t, q) := \bar{x}(t, (\hat{q})^{-1}(q))$  ,  $x_0(q) := (\hat{q})^{-1}(q)$  und die weiteren Anfangswerte  $(\varrho_0, u_0, S_0)(q) := (\hat{\varrho}_0, \hat{u}_0, \hat{S}_0)(\hat{q})^{-1}(q)$  eine Lösung der Lagrangeschen Anfangswertaufgabe (4.55) gewonnen.

Der **Beweis** dieses Satzes ergibt sich aus dem Abschnitt „Von Euler- zu Lagrange-Koordinaten“, der auf Seite 138 beginnt. Aus didaktischen Gründen wird zunächst der umgekehrte Weg dargestellt.

*Von Lagrangeschen Koordinaten zu Euler-Koordinaten*

Seien  $\varrho, u, S$  und  $x$  solche  $C^2$ -Funktionen von  $(t, q)$ , welche die Anfangswertaufgabe

$$(4.51) \text{ und } (\varrho, u, S, x)(0, q) = (\varrho_0, u_0, S_0, x_0)(q)$$

lösen für gegebene  $C^2$ -Anfangsdatenfunktionen  $\varrho_0, u_0, S_0$  und  $x_0$ . Diese dürfen nicht völlig frei gewählt werden, sondern sie müssen die Zwangsbedingung (4.52) von Seite 130 in  $[t = 0]$ ,

also (4.53) von Seite 131 erfüllen. Dadurch bleiben die physikalischen Größen  $\varrho_0$ ,  $u_0$  und  $S_0$  frei vorgebar, während  $x_0$  bis auf eine Integrationskonstante (bzw. den Anfangswert)  $\xi_0$  zu

$$x_0 := q \mapsto \left( (\nu + 1) \int_0^q \frac{d\hat{q}}{\varrho_0(\hat{q})} + \xi_0^{\nu+1} \right)^{\frac{1}{\nu+1}} \quad (4.58)$$

bestimmt ist.

**Lemma 4.5.8** *In (4.52) steht eine Zwangsbedingung, (4.52) wird also propagiert. Dies auch im Sinne von Definition 4.2.1.*

**Beweis** Für  $t = 0$  ist (4.52) genau für  $x_0$  gemäß (4.58) erfüllt, wie man durch Lösen der gewöhnlichen Differentialgleichung  $x'_0 = x_0^{-\nu} / \varrho_0$  erkennt. Die linke Seite aus (4.52) bleibt außerdem zeitlich konstant, denn es gilt

$$\begin{aligned} & \partial_t \partial_q x - \partial_t (x^{-\nu} \cdot \varrho^{-1}) \\ &= \partial_q \partial_t x - (-\nu x^{-\nu-1} (\partial_t x) \cdot \varrho^{-1} - x^{-\nu} \cdot \varrho^{-2} \partial_t \varrho) \\ &= \partial_q u - (-\nu x^{-\nu-1} (\partial_t x) \cdot \varrho^{-1} \\ &\quad - x^{-\nu} \cdot \varrho^{-2} [-\frac{\nu \varrho u}{x} - x^\nu \cdot \varrho^2 \cdot u_q]) \\ &= -[u_q - \partial_q u] =: Z_q, \end{aligned}$$

wobei die Akürzung  $u_q := -(\nu \varrho u / x + \partial_t \varrho) / (x^\nu \varrho^2)$  gemäß (4.16) so gewählt wurde, daß  $Z_u$  genau dann verschwindet, wenn die Entwicklungsgleichung für  $u$  aus (4.51) gilt. Also wird die Zwangsbedingung aus (4.52) propagiert im Sinne von Definition 4.2.1f.  $\square$

Um eine Koordinatentransformation durchführen zu können, ist  $\xi = x(t, q)$  nach  $q$  aufzulösen, also ist eine Umkehrung von

$x(t, \cdot)$ <sup>15</sup> zu finden. Gemäß Zwangsbedingung (4.52) gilt für jedes feste  $t$

$$x(t, \cdot) = q \mapsto \left( (\nu + 1) \int_0^q \frac{d\hat{q}}{\varrho(t, \hat{q})} + x(t, 0)^{\nu+1} \right)^{\frac{1}{\nu+1}} .$$

**Lemma 4.5.9** *Für jedes feste  $t$  ist die Funktion  $x(t, \cdot)$  umkehrbar. Ihre Umkehrung werde durch  $Q$  abgekürzt:*

$$Q(t, \cdot) := (x(t, \cdot))^{-1} . \quad (4.59)$$

**Beweis** Die Ableitung ist positiv, also ist  $x(t, \cdot)$  für jedes  $t$  streng monoton wachsend, folglich injektiv.  $\square$

Um jetzt aus einer Lösung  $(\varrho, u, S, x)$  von (4.51) eine Lösung  $(\bar{\varrho}, \bar{u}, \bar{S})$  von (4.49) zu machen, definiere

$$\bar{\varrho}(\bar{t}, \xi) := \varrho(\bar{t}, Q(\bar{t}, \xi)) \quad (\text{sowie entsprechend } \bar{u} \text{ und } \bar{S}), \quad (4.60)$$

d.h. man führe die **Koordinatentransformation**

$$t = \bar{t}, \quad q = Q(\bar{t}, \xi) \quad (4.61)$$

durch. Aus der Umkehrung

$$\bar{t} = t, \quad \xi = x(t, q)$$

erhält man dann die Differentialoperatoren wegen  $\partial_t x = u$  und  $\partial_q x = \frac{1}{x^\nu \varrho}$  als

$$\partial_t = \partial_{\bar{t}} + u \cdot \partial_\xi \quad \text{und} \quad \partial_q = \frac{1}{x^\nu \varrho} \partial_\xi .$$

---

<sup>15</sup>Der Platzhalter  $\cdot$  ermöglicht, die reellwertige Funktion einer reellen Veränderlichen  $\tilde{q} \mapsto x(t, \tilde{q})$  abzukürzen, ohne für die gebundene Unbekannte ein Symbol  $\tilde{q}$  zu ver(sch)wenden.

Eingesetzt in (4.51) ergibt sich tatsächlich das System in Euler-Koordinaten (4.49). Dieses muß mit den Anfangsdaten

$$(\bar{\varrho}, \bar{u}, \bar{S})(0, \cdot) = (\bar{\varrho}_0, \bar{u}_0, \bar{S}_0) := (\varrho_0, u_0, S_0) \circ x_0^{-1}$$

betrachtet werden, wie aus (4.60,4.61), d.h.  $\bar{\varrho}(\bar{t}, \xi) = \varrho(t, q)$  (sowie Entsprechendes für  $\bar{u}$  und  $\bar{S}$ ) wegen  $Q(0, \cdot) = x_0^{-1}$  folgt.

*Wo ist die Zwangsbedingung geblieben?*

Beim Übergang von Lagrange-Koordinaten zu den Euler-Koordinaten verschwindet die Zwangsbedingung (4.52) gewissermaßen, weil sie in  $(\bar{t}, \xi, \bar{\varrho}, \bar{u}, \bar{S})$  nicht so ohne weiteres ausgedrückt werden kann. Außerdem fehlt eine Gleichung, weil der aktuelle Ort eines Teilchens  $x(t, q)$  zur Raum-Koordinate  $\xi$  gemacht wurde. Dadurch geht die Information „Name  $q$  eines Teilchens“ verloren. Um die Bahnlinie  $\bar{x}_r$  (bzw.  $\xi = \bar{x}_r(t)$ ) eines durch  $r$  bezeichneten Teilchens aus einer Lösung  $(\bar{\varrho}, \bar{u}, \bar{S})$  der Euler-Gleichungen (4.49) zu bestimmen, löst man für jeden Parameter (und Anfangswert)  $r$  die gewöhnliche Differentialgleichung (4.56) aus Satz 4.5.7 von Seite 133 zu

$$\bar{x}_r(\bar{t}) = r + \int_0^{\bar{t}} \bar{u}(t, \bar{x}_r(t)) dt .$$

Für die Bahnlinienschar  $\xi = \bar{x}(\bar{t}, r) := \bar{x}_r(t)$  läßt sich nun ein Erhaltungssatz formulieren, nämlich

$$\bar{x}_r^\nu(\bar{t}) \cdot \bar{\varrho}(\bar{t}, \bar{x}_r(\bar{t})) \cdot \partial_r \bar{x}_r(\bar{t}) = r^\nu \cdot \bar{\varrho}_0(r) \quad , \quad (4.62)$$

der für jede Lösung  $(\bar{\varrho}, \bar{u}, \bar{S})$  von (4.49) zu jedem Zeitpunkt  $\bar{t}$  gilt. Dieser Erhaltungssatz (4.62) entspricht physikalisch der Massenerhaltung und ist die Übersetzung der Zwangsbedingung (4.52). Schon deshalb gilt das folgende Lemma. Es wird aber dennoch bewiesen, um die Massenerhaltung auch hier formal zu zeigen.

Man beachte, daß (4.62) keine zusätzliche Gleichung<sup>16</sup> zu den Eulerschen Gleichungen (4.49) darstellt, weil diese in Koordinaten  $(\bar{t}, \xi)$  notiert sind. Die Gleichung (4.62) ist aber nur formulierbar mit Hilfe der Bahnlinien  $\bar{x}_r(t)$ , welche nicht in  $(\bar{t}, \xi)$  ausgedrückt werden können. Im Gegensatz dazu ist (4.52) eine Zwangsbedingung, die direkt durch abhängige und unabhängige Unbekannte der Lagrangeschen Gleichungen (4.51) ausgedrückt wird.

**Lemma 4.5.10** (4.62) wird von den Eulerschen Gleichungen (4.49) propagiert.

**Beweis** Für  $\bar{t} = 0$  ist (4.62) wegen  $\bar{x}_r(0) = r$  erfüllt. Außerdem verschwindet die Zeitableitung der rechten Seite von (4.62) wegen  $\partial_{\bar{t}}\bar{x} = \bar{u}$  und  $\partial_{\bar{t}}\bar{\rho} = \dots$  aus (4.49):

$$\begin{aligned} & \partial_{\bar{t}} [\bar{x}^\nu(\bar{t}, r) \cdot \bar{\rho}(\bar{t}, \bar{x}(\bar{t}, r)) \cdot \partial_r \bar{x}(\bar{t}, r)] \\ &= \nu \bar{x}^{\nu-1} \bar{u} \cdot \bar{\rho} \cdot \partial_r \bar{x} + \bar{x}^\nu [\partial_{\bar{t}} \bar{\rho} + \bar{u} \cdot \partial_\xi \bar{\rho}] \partial_r \bar{x} \\ & \quad + \bar{x}^\nu \bar{\rho} \cdot \partial_{\bar{t}} \partial_r \left( r + \int_0^{\bar{t}} \bar{u}(t, \bar{x}(\bar{t}, r)) dt \right) \\ &= \nu \bar{x}^{\nu-1} \bar{u} \cdot \bar{\rho} \cdot \partial_r \bar{x} + \bar{x}^\nu \left[ -\frac{\nu \partial_{\bar{t}} \bar{u}}{\bar{x}} - \bar{\rho} \cdot \partial_\xi \bar{u} \right] \partial_r \bar{x} + \bar{x}^\nu \bar{\rho} \cdot \partial_\xi \bar{u} \partial_r \bar{x} \\ &= 0 \quad . \end{aligned}$$

□

*Von Euler-Koordinaten zu Lagrangeschen Koordinaten*

Seien  $\bar{\rho}, \bar{u}$  und  $\bar{S}$  nun solche  $C^2$ -Funktionen von  $(\bar{t}, \xi)$ , welche die Anfangswertaufgabe

$$(4.49) \text{ und } (\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{S})(0, \xi) = (\bar{\rho}_0, \bar{u}_0, \bar{S}_0)(\xi)$$

lösen für gegebene  $C^2$ -Anfangsdatenfunktionen  $\bar{\rho}_0, \bar{u}_0$  und  $\bar{S}_0$ . Diese dürfen vollkommen frei gewählt werden. Setze weiter

---

<sup>16</sup>und auch keine (Pseudo-)Zwangsbedingung



$\bar{x} := [(\bar{t}, r) \mapsto \bar{x}_r(t)]$  für die Lösungsschar von (4.56). Mit der Hilfsfunktion (zwischen  $\xi = 0$  und  $\xi = r$  zur Zeit  $t = 0$  eingeschlossene Masse)

$$\hat{q} : r \mapsto \int_0^r \hat{r}^\nu \bar{\varrho}_0(\hat{r}) \, d\hat{r} \quad (4.63)$$

führt man die Koordinatentransformation

$$\bar{t} = t, \quad \xi = \bar{x} \left( t, (\hat{q})^{-1}(q) \right) \quad (4.64)$$

durch, d.h.  $\varrho(t, q) := \bar{\varrho} \left( t, \bar{x} \left( t, (\hat{q})^{-1}(q) \right) \right)$  (entsprechend  $u$  und  $S$ ) sowie  $x(t, q) := \bar{x} \left( t, (\hat{q})^{-1}(q) \right)$ . Die Differentialoperatoren

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{t}} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial q} = \left( \frac{\partial \bar{x}}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial q} \right)_{r=(\hat{q})^{-1}(q)} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}$$

vereinfachen sich wegen  $\partial_{\bar{t}} \bar{x}(\bar{t}, r) = \bar{u}(\bar{t}, r) = u(t, q)$ ,

$$\frac{\partial (\hat{q})^{-1}(q)}{\partial q} = \left( \frac{1}{r^\nu \bar{\varrho}_0(r)} \right)_{r=(\hat{q})^{-1}(q)}$$

und

$$\partial_r \bar{x} = \left( \frac{r^\nu \bar{\varrho}_0(r)}{\bar{x}^\nu(\bar{t}, r) \bar{\varrho}(\bar{t}, \bar{x}(\bar{t}, r))} \right)_{r=(\hat{q})^{-1}(q)},$$

wobei letzteres aus der Zwangsbedingung (4.62) folgt, zu

$$\partial_t = \partial_{\bar{t}} + u \cdot \partial_\xi \quad \text{und} \quad x^\nu \cdot \varrho \cdot \partial_q = \partial_\xi \quad .$$

Setzt man dies in (4.49) ein, dann erhält man die Gleichungen (4.51), also das System in der Lagrangeschen Betrachtungsweise. Außerdem folgt aus (4.62) die Zwangsbedingung (4.52). Die Anfangswerte transformieren sich gemäß (4.64) durch

$$\varrho_0 := \bar{\varrho}_0 \circ (\hat{q})^{-1} \quad \text{und entspr. für } u \text{ und } S \text{ sowie } x_0 := (\hat{q})^{-1} .$$

#### 4. Diagonalisierung

---

Man beachte, daß  $x_0$  und  $\hat{q}$  zueinander invers sind, folglich  $\hat{q} = Q(0, \cdot)$  für  $Q$  aus (4.59) gilt.

##### *Physikalische Interpretation*

In allen Koordinatensystemen ist  $t$  bzw.  $\bar{t}$  die Zeit, während  $\xi$ ,  $x$  bzw.  $\bar{x}$  je nach Art der Symmetrie die entsprechende Raumkoordinate ist (vgl. Seite 128). Der Anfangsort eines Teilchens ist  $r$  (Anfangsbedingung in (4.56)) und wäre somit als Raumkoordinate für die Lagrangesche Betrachtungsweise denkbar. Es wurde aber das  $(t, q)$ -Koordinatensystem gewählt, wobei  $q = \hat{q}(r)$  aus (4.63) eine Massenkoordinate ist, die den Vorteil hat, daß die Gleichungen (4.51) keine Anfangsdaten enthalten.

Die Zwangsbedingung (4.62) läßt sich als Folge der anschaulichen Vorstellung auffassen, nach welcher die Massenerhaltung die zeitliche Konstanz der zwischen den Bahnkurven  $\xi = \bar{x}(\cdot, 0)$  und  $\xi = \bar{x}(\cdot, r)$  eingeschlossenen Masse bedeutet. Vergleich der eingeschlossenen Massen zu den Zeitpunkten  $t = 0$  und  $t = \bar{t}$  besagt dabei

$$\int_0^r \varrho_0(r) \cdot r^\nu dr = \int_{\bar{x}(\bar{t}, 0)}^{\bar{x}(\bar{t}, r)} \bar{\varrho}(\bar{t}, \bar{x}(\bar{t}, \hat{r})) \cdot \bar{x}^\nu(\bar{t}, \hat{r}) d\hat{r} \quad .$$

Daraus folgt (4.62) durch Differentiation  $\frac{d}{dr}$ . Wegen

$$\partial_r = \frac{\partial}{\partial r} = \hat{q}' \cdot \frac{\partial}{\partial q} = (r^\nu \varrho_0(r))_{r=x_0(q)} \partial_q \quad (4.65)$$

ist die Zwangsbedingung (4.52) auch nichts anderes als die Massenerhaltung (4.62). Physikalisch bedeutet also letztlich die Propagation der Zwangsbedingung nichts weiter als „Die Kontinuitätsgleichung impliziert Massenerhaltung“.

### 4.5.3 Diagonalisierung

#### *Voraussetzungen für Diagonalisierung*

Während sich das Gleichungssystem (4.49) unter Verdopplung der Anzahl der Unbekannten herkömmlich diagonalisieren läßt, ist dies bei den Gleichungen in Lagrangeschen Koordinaten (4.51) nicht möglich. Dagegen ist mein Diagonalisierungsverfahren anwendbar, wie ich jetzt begründen werde.

Zu den verschwindenden Eigenwerten gehören die zwei trivial propagierenden Unbekannten  $S$  und  $x$ , denn

$$\partial_t \begin{bmatrix} S \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}$$

enthält keine Raumableitungen. Die beiden verbleibenden Unbekannten  $\varrho$  und  $u$  werden regulär propagiert, weil die Matrix in

$$\partial_t \begin{bmatrix} \varrho \\ U \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & x^\nu \cdot \varrho^2 \\ x^\nu \cdot \partial_{\varrho} \hat{p} & 0 \end{bmatrix} \cdot \partial_q \begin{bmatrix} \varrho \\ U \end{bmatrix} = \dots$$

invertierbar ist. Als letzte Voraussetzung für die Anwendung meines Verfahrens ist nur noch zu zeigen, daß sich die Raumableitungen der trivial propagierten Unbekannten  $S$  und  $x$  durch  $(\varrho, u, S, x)$  und gegebene Funktionen ausdrücken lassen. Bei den Einsteinschen Feldgleichungen ermöglichen dies Zwangsbedingungen, die für das quasilineare System in zwei unabhängigen Unbekannten, also das System (2.25), in (2.26) zu finden sind.

Tatsächlich gehören zu den Gleichungen der eindimensionalen Gasdynamik die benötigten (Pseudo-)Zwangsbedingungen. Die Pseudo-Zwangsbedingung  $\partial_q S = S'_0$ , wobei  $S_0$  die gegebene Anfangsdatenfunktion  $q \mapsto S_0(q)$  sei, ist dabei so trivial,

#### 4. Diagonalisierung

---

daß sie hier nur aus systematischen Gründen angesprochen wird. Diese Bedingung ist für jede Wahl von  $S_0$  erfüllt und bleibt wegen  $\partial_t S = 0$  für alle Zeiten gültig.

Die andere Zwangsbedingung soll  $\partial_q x$  ableitungsfrei auszudrücken ermöglichen. In Satz 4.5.1 wurde die Zwangsbedingung (4.52) zu den Lagrange-Gleichungen hinzugefügt, die sich gerade

$$\partial_q x = \frac{1}{x^\nu \varrho}$$

schreiben läßt. Damit sind alle Voraussetzungen für die Diagonalisierung gegeben.

*Das diagonale System in Lagrangeschen Koordinaten*

Mit der Abkürzung  $c := \sqrt{\partial_\varrho \hat{p} \circ (\varrho, S)}$  (Schallgeschwindigkeit) lautet gemäß Kapitel 4 die Diagonalisierung von (4.51) unter Verwendung der Zwangsbedingung (4.52)

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho &= \varrho_t := \frac{v_+ + v_-}{2c} \\ \partial_t u &= u_t := \frac{v_+ - v_-}{2\varrho} \\ \partial_t S &= S_t := 0 \\ \partial_t x &= x_t := u \\ \partial_t v_+ + c \varrho x^\nu \cdot \partial_q v_+ &= g_+ \\ \partial_t v_- - c \varrho x^\nu \cdot \partial_q v_- &= g_- \quad , \end{aligned} \tag{4.66}$$

wobei

$$\begin{aligned} g_\pm &:= -\nu \cdot \left( [c_t \varrho + c \varrho_t] \frac{u}{x} + c \varrho \left[ \frac{u_t x - u x_t}{x^2} \right] \right) \\ &\quad - S'_0 \left[ \nu x^{\nu-1} x_t \varrho p_S + x^\nu (\varrho_t p_S + \varrho p_{St}) \right] \\ &\quad \mp (\lambda_t c + \lambda c_t) \varrho_q - (\lambda_t \varrho + \lambda \varrho_t) u_q \\ &\quad + \lambda (\pm c_q \varrho_t + \varrho_q u_t) \end{aligned} \tag{4.67}$$

mit Hilfe der Abkürzungen

$$\begin{aligned} \lambda &:= c \varrho x^\nu, \quad \lambda_t := \left( \frac{c_t}{c} + \frac{\varrho_t}{\varrho} + \frac{\nu x_t}{x} \right) \lambda, \\ c_t &:= \varrho_t \partial_\varrho c, \quad c_q := \varrho_q \partial_\varrho c + S_q \partial_q c, \\ \varrho_q &:= -\frac{u_t}{x^\nu c^2} - \frac{\partial_q S p_S}{c^2} \\ p_S &:= \partial_S \hat{p} \circ (\varrho, S), \quad p_{St} := \partial_S \varrho \hat{p} \circ (\varrho, S) \varrho_t + \partial_{SS} \hat{p} \circ (\varrho, S) S_t \\ u_q &:= -\frac{\nu \varrho u}{x^{\nu+1} \varrho^2} - \frac{\varrho_t}{x^\nu \varrho^2}, \quad \text{und} \quad x_q = \frac{1}{x^\nu \varrho} \end{aligned}$$

definiert ist. Aus strukturellen Gründen stört dabei  $\partial_q S$ , welches sich aber durch  $S'_0$  ersetzen läßt, sobald man Anfangsdaten einbezieht.

Es ist also das Anfangswertproblem

$$(4.66), (\varrho, u, S, x, v_+, v_-)(0, \cdot) = (\varrho_0, u_0, S_0, x_0, (v_+)_0, (v_-)_0) \quad (4.68)$$

zu betrachten. Dabei sind die Anfangsdatenfunktionen  $\varrho_0, u_0$  und  $S_0$  frei wählbare  $C^2$ -Funktionen. D.h. genau für die „physikalischen“ Größen Dichte  $\varrho$ , Geschwindigkeit  $u$  und Entropie  $S$  werden echte Vorgaben gemacht. Die Bahnkurvengröße  $x$  wird anfänglich durch (4.58) mit Integrationskonstante  $\xi_0 = 0$  festgelegt.

#### 4. Diagonalisierung

---

Anfangsdaten für die Hilfsfunktionen ergeben sich dabei aus (4.22)<sup>17</sup> zu

$$(v_{\pm})_0 := c_0^2 \cdot \left( -\frac{\nu \varrho_0 u_0}{x_0} - x_0^\nu \varrho_0^2 u_0' \right) \\ \mp c_0 \cdot x_0^\nu \cdot \left[ \varrho_0' \cdot c_0^2 + S_0' \cdot \partial_{S_0} \hat{p} \circ (\varrho_0, S_0) \right] \quad , \quad (4.69)$$

wobei  $c_0 := \sqrt{\partial_{\varrho} \hat{p} \circ (\varrho_0, S_0)}$  ist. Dann gilt für jede  $C^2$ -Lösung  $(\varrho, u, S, x, v_+, v_-)$  von (4.68), daß durch (4.60) und (4.61) eine Lösung  $(\bar{\varrho}, \bar{u}, \bar{S})$  von

$$(4.49) \text{ mit } (\bar{\varrho}, \bar{u}, \bar{S})(0, \cdot) = (\varrho_0, u_0, S_0) \circ x_0^{-1}$$

definiert wird.

---

<sup>17</sup>Für die vorliegende Anwendung ist dabei die rechte Seite von (4.22)

$$\begin{bmatrix} \partial_{\varrho} \hat{p} \circ (\varrho_0, S_0) & +\sqrt{\partial_{\varrho} \hat{p} \circ (\varrho_0, S_0)} \\ \partial_{\varrho} \hat{p} \circ (\varrho_0, S_0) & -\sqrt{\partial_{\varrho} \hat{p} \circ (\varrho_0, S_0)} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{V} \quad \text{mit} \quad \mathbf{V} := \\ \begin{bmatrix} -\frac{\nu \varrho_0 u_0}{x_0} & & & \\ -x_0^\nu \cdot S_0' \cdot \partial_S \hat{p} \circ (\varrho_0, S_0) & - \begin{pmatrix} 0 & x_0^\nu \cdot \varrho_0^2 \\ x_0^\nu \cdot \partial_{\varrho} \hat{p} \circ (\varrho_0, S_0) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varrho_0' \\ u_0' \end{pmatrix} \end{bmatrix} .$$

*Diagonalisierte Gleichungen in Euler-Koordinaten*

Entsprechend lautet das System (4.49) in Diagonalform

$$\begin{aligned}
 \partial_t \bar{\rho} + \bar{u} \cdot \partial_\xi \bar{\rho} &= \frac{\bar{v}_+ + \bar{v}_-}{\bar{c}^2} \\
 \partial_t \bar{u} + \bar{u} \cdot \partial_\xi \bar{u} &= \frac{\bar{v}_+ - \bar{v}_-}{\bar{c} \bar{\rho}} \\
 \partial_t \bar{S} + \bar{u} \cdot \partial_\xi \bar{S} &= 0 \\
 \partial_t \bar{v}_+ + (\bar{u} + \bar{c}) \cdot \partial_\xi \bar{v}_+ &= \bar{g}_+ \\
 \partial_t \bar{v}_- + (\bar{u} - \bar{c}) \cdot \partial_\xi \bar{v}_- &= \bar{g}_- \quad ,
 \end{aligned} \tag{4.70}$$

wobei  $\bar{g}_\pm$  aus  $g_\pm$  entsteht, indem man  $(\rho, u, S, x, v_+, v_-)$  in (4.67) mit Querstrich versieht und dann  $\bar{x}$  durch  $\xi$  ersetzt. Zu den physikalisch sinnvollen Anfangsdaten

$$(\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{S})(0, \cdot) = (\bar{\rho}_0, \bar{u}_0, \bar{S}_0)$$

gesellen sich die Bedingungen  $\bar{v}_\pm(0, \cdot) = (\bar{v}_\pm)_0$ , wobei in Konsistenz zu (4.69) und (4.65) durch

$$\begin{aligned}
 (\bar{v}_\pm)_0(r) &:= \bar{c}_0^2(r) \cdot \left( -\frac{v(\bar{\rho}_0 \bar{u}_0)(r)}{r} - (\bar{\rho}_0 \bar{u}'_0)(r) \right) \\
 &\mp \bar{c}_0(r) \cdot \left[ \left( \frac{\bar{\rho}'_0 \cdot \bar{c}_0^2}{\bar{\rho}_0} \right)(r) + \left( \frac{\bar{S}'_0}{\bar{\rho}_0} \right)(r) \cdot \partial_{\bar{S}_0} \hat{p}(\bar{\rho}_0(r), \bar{S}_0(r)) \right]
 \end{aligned}$$

mit  $\bar{c}_0 := \sqrt{\partial_{\bar{\rho}_0} \hat{p} \circ (\bar{\rho}_0, \bar{S}_0)}$  zu definieren ist.

In (4.70) steht also eine diagonalisierte Form der Gleichungen der eindimensionalen Gasdynamik in Euler-Koordinaten mit nur 5 abhängigen Unbekannten.

#### *4. Diagonalisierung*

---