# 8. Anhang zur Diagonalisierung

## 8.1 Beweis zum Diagonalisierungssatz

Hier wird der Satz 4.2.2 zur Äquivalenz von Grundsystem und diagonalisiertem System den mit zusätzlichen Unbekannten $v = \mathbf{S} \cdot \partial_t \tilde{u}$ bewiesen. Der Satz steht auf Seite 107.

**Beweis von Satz 4.2.2** Sei $u$ eine $C^2$–Lösung von (4.13) auf dem Gebiet $G$, die außerdem die Zwangsbedingung $\hat{Z} = 0$ aus (4.15) erfülle, d.h. es gilt $\partial_x \hat{u} = \hat{u}_x$, wobei $\hat{u}_x$ ableitungsfrei in $u = (\hat{u}, \tilde{u})$ ausgedrückt ist. Multipliziert man die zweite Gleichung aus (4.13) von links mit $\mathbf{S} \circ \bar{u}$ und benutzt $\mathbf{\Lambda S} = \mathbf{SA}$, so folgt

$$\mathbf{S} \cdot \partial_t \tilde{u} + \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{S} \cdot \partial_x \tilde{u} = \mathbf{S} \cdot b. \tag{8.1}$$

Dies wird nach $t$ differenziert zu

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{S} \cdot \tilde{u}_t) + \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{S} \cdot \partial_x \tilde{u}_t = \frac{d}{dt} (\mathbf{S} \cdot b) - \frac{d}{dt} (\mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{S}) \cdot \partial_x \tilde{u} \quad ,$$

wobei $\tilde{u}_t := \partial_t \tilde{u}$ ist, und etwa $\frac{d}{dt} (\mathbf{S})$ als Abkürzung für $\partial_t (\mathbf{S} \circ \bar{u}) = \partial_t \mathbf{S} + \partial_u \mathbf{S} \cdot \partial_t U$ zu lesen ist. Nach Addition von $\mathbf{\Lambda} \cdot \frac{d}{dx}(\mathbf{S}) \cdot \tilde{u}_t$ gilt dann für $v := (\mathbf{S} \circ \bar{u}) \cdot \tilde{u}_t$

$$\begin{aligned} \partial_t v + \mathbf{\Lambda} \cdot \partial_x v &= \tfrac{d}{dt}(\mathbf{S} \cdot b) - \tfrac{d}{dt}(\mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{S}) \cdot \partial_x \tilde{u} + \mathbf{\Lambda} \cdot \tfrac{d}{dx}(\mathbf{S}) \cdot \tilde{u}_t \\ &=: \tilde{g} \circ \overline{(u, \tilde{u}_t, \partial_x \tilde{u})} \quad . \end{aligned} \tag{8.2}$$

Dabei wurde implizit (beim „=:“) benutzt, daß $\partial_t \hat{u}$ und $\partial_x \hat{u}$ ableitungsfrei darstellbar sind.

Definiert wird nun mit $u = (\hat{u}, \tilde{u})$ und der Graphenabbildung

$$\begin{aligned} g \circ \overline{(u, v)} &:= \\ &\overline{\tilde{g} \circ \left(u, (\mathbf{S} \circ \bar{u})^{-1} \cdot v, (\mathbf{A} \circ \bar{u})^{-1} \cdot \left[b \circ \bar{u} - (\mathbf{S} \circ \bar{u})^{-1} \cdot v\right]\right)}. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Nach Definition von $v$ gelten $\tilde{u}_t = (\mathbf{S} \circ \bar{u})^{-1} \cdot v,$ und somit folgt aus (4.13)

$$\partial_x \tilde{u} = (\mathbf{A} \circ \bar{u})^{-1} \cdot \left[b \circ \bar{u} - (\mathbf{S} \circ \bar{u})^{-1} \cdot v\right]. \tag{8.4}$$

Also gilt $\partial_t v + \mathbf{\Lambda} \cdot \partial_x v = g \circ \overline{(u, v)}$. Damit ist gezeigt, daß $(u, v)$ eine $C^1$–Lösung von (4.20) auf $G^{\perp}$ ist.

Nun sei **umgekehrt** eine $C^1(G)$–Lösung $(u, v)$ von (4.20) mit $Z_{|[t=t_0(x)]} = 0$ für $Z := (\hat{Z}, \tilde{Z})$ aus (4.15) und (4.16) gegeben. Zu zeigen ist (4.13), wobei die erste Gleichung mit der vorausgesetzten ersten Gleichung von (4.20) identisch ist. Es genügt daher, die zweite Gleichung zu beweisen. Dies ist aber nur eine algebraische Umformung von $\tilde{Z} \equiv 0$ auf $G$, so daß es letztlich um die Propagation dieser Zwangsbedingung geht.

Man kürzt wieder $\tilde{u}_t := \partial_t \tilde{u}$ ab und zeigt zunächst, daß

$$\partial_t \partial_x \tilde{u} = \partial_x \tilde{u}_t \tag{8.5}$$

gilt. Liegt für $\tilde{u}$ in $(t_0(x), x)$ ein Anfangswert $\tilde{u}_0(x)$ vor, so ist

$$\tilde{u}(t, x) = \tilde{u}_0(x) + \int_{t_0(x)}^{t} \left(\mathbf{S}^{-1} v\right)(s, x) \, \mathrm{d}s$$

auf $G^{\perp} \subset G$ aus (4.18). Also ergibt sich (8.5) aus

$$\begin{aligned}
\partial_t \partial_x \tilde{u} &= \partial_t \Big( \tilde{u}_0'(x) + \textstyle\int_{t_0(x)}^{t} \partial_x \left(\mathbf{S}^{-1} v\right)(s,x)\ \mathrm{d}s \\
&\qquad - \mathbf{S}^{-1}\left(t_0(x), x, u_0(x)\right) \cdot v\left(t_0(x), x\right) \cdot t_0'(x) \Big) \\
&= \partial_x \left(\mathbf{S}^{-1} v\right)(t,x) = \partial_x \partial_t \tilde{u},
\end{aligned}$$

worin wegen $(\tilde{u}, v) \in C^1\left(G^{\perp}\right)$ alle Ableitungen wohldefiniert sind.

Nach Voraussetzung ist $v = (\mathbf{S} \circ \tilde{u}) \cdot \tilde{u}_t$, und für $\tilde{u}_x$ aus (4.16) gilt $g \circ \overline{(u,v)} = \tilde{g} \circ \overline{(u, \tilde{u}_t, \tilde{u}_x)}$ nach Definition (8.3). In (8.2) taucht $\partial_x \tilde{u}$ nur linear auf. Also ist

$$\tilde{g} \circ \overline{(u, \tilde{u}_t, \partial_x \tilde{u})} - g \circ \overline{(u,v)} = \left(L \circ \overline{(u,v)}\right)\left(\hat{Z}, \tilde{Z}\right), \tag{8.6}$$

wobei $L\left(\hat{Z}, \tilde{Z}\right)$ linear[1] in $Z = \left(\hat{Z}, \tilde{Z}\right)$ ist. Nun ist eine Zeitentwicklungsgleichung für $\tilde{Z}$ aus (4.16) zu gewinnen. Nach Produktregel gilt

$$\partial_t \tilde{Z} = (\mathbf{\Lambda S})^{-1} \left[ \frac{d}{dt}\left(\mathbf{\Lambda S} \tilde{Z}\right) - \frac{d}{dt}(\mathbf{\Lambda S})\, \tilde{Z} \right]. \tag{8.7}$$

Darin ist wegen $\mathbf{\Lambda S} \tilde{u}_x = \mathbf{S A A}^{-1}\left[b - \tilde{u}_t\right] = \mathbf{S} b - v$ und (8.5) auch

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}\left(\mathbf{\Lambda S} \tilde{Z}\right) &= \tfrac{d}{dt}(\mathbf{S} b) - v_t - \tfrac{d}{dt}(\mathbf{\Lambda S})\, \partial_x \tilde{u} \\
&\qquad - \mathbf{\Lambda}\left[\mathbf{S} \partial_t \partial_x \tilde{u} + \left(\tfrac{d}{dx} \mathbf{S}\right) \tilde{u}_t\right] + \mathbf{\Lambda}\left(\tfrac{d}{dx} \mathbf{S}\right) \tilde{u}_t \\
&= \tilde{g} \circ \overline{(\tilde{u}, \tilde{u}_t, \partial_x \tilde{u})} - \left(v_t + \mathbf{\Lambda} v_x\right)
\end{aligned}$$

nach (8.6) linear in $Z$. Zusammen mit (4.17) folgt also

$$\partial_t Z = [\text{lineare Funktion in } Z]. \tag{8.8}$$

[1] $L\left(\hat{Z}, \tilde{Z}\right) = \frac{d}{dt}(\mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{S}) \cdot \tilde{Z} - \mathbf{\Lambda} \cdot \left(\partial_{\tilde{u}} \mathbf{S}\right) \cdot \hat{Z} \cdot \tilde{u}_t - \mathbf{\Lambda} \cdot \left(\partial_{\tilde{u}} \mathbf{S}\right) \cdot \tilde{Z} \cdot \tilde{u}_t$

Auf der Anfangsfläche $[t = t_0(x)]$ verschwindet $Z$ nach Voraussetzung (4.21). Für jeden festen Ort $x$ ist $Z(\cdot, x)$ die eindeutige Lösung der gewöhnlichen, linearen und homogenen Differentialgleichung (8.8) mit Anfangswert 0. Also gilt $Z = 0$ auf ganz $G^{\perp}$. Dabei ist $\tilde{Z} = 0$ nach (4.16) nichts anderes als $\partial_t \tilde{u} + (\mathbf{A} \circ u) \cdot \partial_x \tilde{u} = b \circ u$. Also gilt (4.13).

Zu zeigen bleibt nur $u \in C^2\left(G^{\perp}\right)$. Dies folgt aber aus der stetigen Differenzierbarkeit der partiellen Ableitungen. Sowohl $\partial_t U$ als auch $\partial_x U$ sind nämlich in $(u, v) \in C^1\left(G^{\perp}\right)$ ausdrückbar, wie (4.20) bzw. $Z = 0$ zeigen.

Entsprechend ist die Lipschitzstetigkeit der Ableitungen zu begründen. 2

## 8.2 Zur relativistischen Anwendung

### 8.2.1 Zwangsbedingungen und Propagation

**Lemma 8.2.1** *Seien $R, M \in C^2$ und $\varrho, U \in C^1$ so gegeben, daß die ersten beiden Gleichungen aus (2.25)*

$$\begin{aligned} \partial_t R &= e^{\hat{\phi}(\varrho)} U \\ \partial_t M &= -2 e^{\hat{\phi}(\varrho)} U \left[\tfrac{M-1}{2R} - 4\pi \hat{p}(\varrho) R\right] \end{aligned} \tag{8.9}$$

*sowie $R_{|[r=0]} = 0$, $R_{|[r>0]} > 0$ und $\left(\frac{M-1}{R}\right)_{|[r=0]} = 0$ gelten. Dann verschwindet $(Z_R, Z_M)$ genau dann, wenn (2.26) gilt.*

**Beweis** Für $\tilde{m} := -\frac{M-1}{2} R$ gelten $\tilde{m}_{|[r=0]} = 0$,

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{m} &= -\tfrac{\partial_t M}{2} R - \tfrac{M-1}{2} \partial_t R \\ &= -\left[-\partial_t R \left(\tfrac{M-1}{2R} - 4\pi p R\right)\right] R - \tfrac{M-1}{2} \partial_t R \\ &= -4\pi p R^2 \partial_t R \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\partial_r \tilde{m} &= -\left(-8\pi\varrho R R_r - \tfrac{M-1}{R} R_r - Z_M\right)\tfrac{R}{2} - \tfrac{M-1}{2}\partial_r R \\ &= 4\pi\varrho R^2 \partial_r R + \left(4\pi\varrho R^2 + \tfrac{M-1}{2}\right) Z_R + \tfrac{R}{2} Z_M \quad .\end{aligned}$$

Im Falle $(Z_R, Z_M) \equiv 0$ auf $G^\perp$ folgt nun, daß dieses $\tilde{m}$, das nach Definition $M - 1 + \frac{2\tilde{m}}{R} = 0$ erfüllt, und die ADM-Masse $m$, wie sie hinter (2.26) auf Seite 28 definiert wurde, identisch sind, also (2.26) gilt.

Umgekehrt folgt aus (2.26) durch räumliche Differentiation, daß $\partial_r\left(-\frac{M-1}{2}R\right)$ und $\partial_r m = 4\pi\varrho R^2 \partial_r R$ gleich sind, also

$$\left(4\pi\varrho R^2 + \frac{M-1}{2}\right) Z_R + \frac{R}{2} Z_M = 0$$

gilt. Darin verschwindet $Z_R$ nach Voraussetzung. Die andere Bedingung $Z_M = 0$ bleibt dann nur noch für $R = 0$ zu zeigen. Auf $[r = 0]$ gilt aber $M_r = 0$ und somit verschwindet dort auch $Z_M = -\partial_r M = \partial_r\left(\frac{2m}{R} - 1\right) = 0$. 2

Zur **Propagation der Zwangsbedingungen** dient

**Lemma 8.2.2** *Sei nun eine Lösung $(R, M, \varrho, U)$ von (8.9) mit $R, M \in C^2$ und $\varrho, U \in C^1$ gegeben. Dann ist die Zeitableitung von $\hat{Z} := (Z_R, Z_M)$ aus (4.29f) schreibbar als Linearkombination von $\hat{Z}$ und $\tilde{Z} := (Z_\varrho, Z_U)$ aus (4.31f), d.h. die Zwangsbedingungen $\hat{Z} = 0$ werden gemäß Definition 4.2.1 propagiert.*

**Beweis** Für die Zeitableitungen $\partial_t$ schreibe ich jetzt einen Punkt. Nach Definition von $U_r$ und wegen $e^\phi U = \dot{R}$ gilt

$$U_r = -e^{-\phi} R_r \left(\frac{2\dot{R}}{R} + \frac{\dot{\varrho}}{p + \varrho}\right) \quad . \tag{8.10}$$

Auf Seite 29 wurde erklärt, daß zur Formulierung der Zwangsbedingungen eine Hilfsfunktion $A_\Sigma$ benutzt wird. Sei diese also mit den dort genannten Eigenschaften gegeben. Dann folgt aus $e^{\lambda/2} = \frac{A'_\Sigma(x)}{4\pi\hat{n}(\varrho)R^2}$, $\frac{\hat{n}'(\varrho)}{\hat{n}(\varrho)} = \frac{1}{p+\varrho}$ und (8.10)

$$\partial_t\left(e^{\lambda/2}\right) = \partial_t\left(\frac{A'_\Sigma(x)}{4\pi\hat{n}(\varrho)R^2}\right) = -\left(\frac{\dot{\varrho}}{p+\varrho} + \frac{2\dot{R}}{R}\right)e^{\lambda/2} = \frac{e^\phi U_r}{\Gamma}.$$

Daraus folgt mit $\partial_t\partial_r R = \partial_r\dot{R}$, $R_r = e^{\lambda/2}\Gamma$, $\hat{\phi}'(\varrho) = \frac{-s^2}{p+\varrho}$ und (2.27)

$$\begin{aligned}
\partial_t Z_R &= \partial_t\left(e^{\lambda/2}\Gamma\right) - \partial_r\left(e^\phi U\right) \\
&= e^\phi U_r + e^{\lambda/2}\dot{\Gamma} - e^\phi\left(\tfrac{-s^2}{p+\varrho}\varrho' U + U'\right) \\
&= e^\phi Z_U + e^{\lambda/2}\dot{\Gamma} + e^{\lambda/2}\tfrac{\beta}{\gamma}\tfrac{U}{\Gamma}\left(\varrho_r - Z_\varrho\right) \\
&= e^\phi Z_U - e^{\lambda/2}Z_\varrho \quad ,
\end{aligned} \tag{8.11}$$

wobei zuletzt die wegen $e^\phi\nu = \frac{-\partial_t M}{2U}$ und $M = \Gamma^2 - U^2$ gültige Formel

$$\varrho_r = -\frac{\gamma}{\beta}\frac{\dot{M} + 2U\dot{U}}{2U} = -\frac{\gamma}{\beta}\frac{\Gamma}{U}\dot{\Gamma}$$

benutzt wurde. Also wird $Z_R = 0$ propagiert.

Mit der Produktregel folgt wegen $\partial_t \partial_r M = \partial_r \dot{M}$ zunächst

$$\begin{aligned}
&\partial_t Z_M = \\
&= \partial_t \left(-8\pi \varrho R R_r - \tfrac{M-1}{R} R_r\right) - \partial_r \left(-2\dot{R}\left(\tfrac{M-1}{2R} - 4\pi p R\right)\right) \\
&= -8\pi \left[\dot{\varrho} R R_r + \varrho \dot{R} R_r + \varrho R \dot{R}_r + p R \dot{R}' + \hat{p}'(\varrho)\, \varrho' R \dot{R} + p \dot{R} R'\right] \\
&\quad -\dot{M} \tfrac{R_r}{R} + \tfrac{M-1}{R^2} \dot{R} (R' + Z_R) - \tfrac{M-1}{R} \dot{R}_r \\
&\quad +2\dot{R}' \tfrac{M-1}{2R} + \dot{R} \left(\tfrac{M'}{R} - \tfrac{M-1}{R^2} R'\right) \\
&= -8\pi \Big[\dot{\varrho} R (R' + Z_R) + (p+\varrho) \dot{R} R_r - p \dot{R} Z_R \\
&\quad + (p+\varrho) R \dot{R}_r - p R \partial_t Z_R + s^2 \varrho' R \dot{R}\Big] \\
&\quad +2\dot{R} \left(\tfrac{M-1}{2R} - 4\pi p R\right) \tfrac{R_r}{R} + \tfrac{M-1}{R^2} \dot{R} Z_R \\
&\quad -\tfrac{M-1}{R} \partial_t Z_R + \tfrac{\dot{R}}{R} \left[\left(-8\pi \varrho R - \tfrac{M-1}{R}\right) R_r - Z_M\right] \quad ,
\end{aligned}$$

wobei der Strich $'$ als Abkürzung von $\partial_r$ zu lesen ist. Wegen

$$\begin{aligned}
(p+\varrho) R \dot{R}_r &= (p+\varrho) R \left[\left(e^{\phi} U\right)' + \partial_t Z_R\right] \\
&= -s^2 \varrho' R \dot{R} + (p+\varrho) R \left\{e^{\phi} \left[U_r - Z_U\right] + \partial_t Z_R\right\} \quad ,
\end{aligned}$$

(8.10) und (8.11) folgt daraus

$$\begin{aligned}
\partial_t Z_M &= -8\pi \Big[\dot{\varrho} R R' + 2(p+\varrho) \dot{R} R_r \\
&\qquad - (p+\varrho) R R_r \left(\tfrac{2\dot{R}}{R} + \tfrac{\dot{\varrho}}{p+\varrho}\right)\Big] + \alpha^T \cdot \mathbf{Z} \\
&= 8\pi \dot{\varrho} R Z_R + \alpha^T \cdot \mathbf{Z} \quad ,
\end{aligned}$$

wobei $\mathbf{Z} = (Z_R, Z_M, Z_\varrho, Z_U)$ ist, und $\alpha$ ein Vektor ist, dessen vier Komponenten jeweils ein Polynom in $R$, $M$, $\varrho$, $U$, $e^{\phi}$, $\frac{U}{\Gamma\gamma}$, $p$, $s$, $\frac{M-1}{R^2}$, $\frac{U}{R}$ ist. Damit ist auch die Propagation von $Z_M = 0$ gezeigt. 2