

# Symbolverzeichnis

<u>Symbol</u> <sup>2 3</sup>	<u>Bedeutung</u>	<u>Seite</u>
$\cdot$	Funktion $f = f(\cdot)$ , etwa $x(t, \cdot)$ kürzt $\tilde{q} \mapsto x(t, \tilde{q})$ symbolsparend ab .....	–
$\circ$	Hintereinanderausführung von Funktionen, etwa $f \circ g$ kürzt $x \mapsto f(g(x))$ ab.....	20
$\partial_t$	partielle Ableitung nach der ersten Unbekannten, der Zeit $t$ .....	1
$\partial_x$	partielle Ableitung nach der zweiten Unbekannten, dem Ort $x$ .....	1
$\ w_k\ _{C^0}$	$C_0$ -Norm, Supremumsnorm .....	79
$\ w_k\ _{C^n}$	$C_n$ -Norm, Max. der Supremumsnormen aller Ableitungen der Ordnung $\leq n$ .....	79

---

<sup>2</sup>Aufgeführt werden nur solche Symbole mit der Seitenzahl ihrer ersten Benutzung, die an mehreren Stellen vorkommen. Ungenannt bleiben also in der Regel solche Schreibweisen die nur innerhalb eines Lemmas (und dessen Beweises) gelten

<sup>3</sup>griechische Symbole befinden sich ab Seite 253 in entsprechender Reihenfolge

$]a, b]$	$:= \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$ , halboffenes Intervall .....	–
$\mathbf{A}(u)$	Matrix vor den Raumableitungen, Kurzform von $\mathbf{A} \circ \bar{u}$ .....	1
$\mathbf{A} \circ \bar{u}$	Verkettung der Matrix $\mathbf{A}$ mit $\bar{u}$ , Kurzform von $(t, x) \mapsto \mathbf{A}(t, x, u(t, x))$ .....	104
$b$	rechte Seite der trivial propagierten Unbekannten von $\partial_t u = b(t, x, u, v)$ .....	84
$B$	Sternrand $[r = r_b]$ .....	15
$B_H$	Parametrisierung für lichtartige Fläche $H$ .	21
$c$	$:= \sqrt{\partial_{\varrho} \hat{p} \circ (\varrho, S)}$ , Schallgeschwindigkeit in Lagrange-Koordinaten $(t, q)$ .....	130
$\bar{c}$	$:= \sqrt{\partial_{\bar{\varrho}} \hat{p} \circ (\bar{\varrho}, \bar{S})}$ , Schallgeschwindigkeit in Euler-Koordinaten $(\bar{t}, \xi)$ .....	128
$C$	Cauchy-Fläche mit harmlosen Daten .....	16
$C^n$	$n$ -mal stetig differenzierbare Funktionen...	–
$C^0$	stetige Funktionen mit Supremumsnorm...	41
$C_L^1$	Lipschitz-stetig differenzierbare Funktionen	79
$e^{(\cdot)}$	$= \exp(\cdot)$ , Exponentialfunktion zur Basis $e$ .	21
$F$	raumartige Datenfläche in Zentrumsnähe..	16
$g^{ab}$	(Komponenten der) Metrik .....	19

*Symbolverzeichnis*

$g_{\pm}$	rechte Seite der nichttrivial propag. $v_{\pm}$ -Gl. $\partial_t v_{\pm} + \lambda_{\pm}(t, x, u) \partial_x v_{\pm} = g_{\pm}(t, x, u, v) \dots$	84
$g_1$	$g_+$ in der Diagonalisierung zu (2.25).....	115
$g_2$	$g_-$ dazu .....	115
$\tilde{g}$	rechte Seite der diagon. linearisierten Gl., d.h. $z \mapsto g(z, u(z)) \dots$	211
$G^{ab}$	Einstein tensor $R^{ab} - \frac{1}{2}g^{ab}\mathcal{R} \dots$	19
$G(T)$	Gebiet mit zeitlicher Begrenzung $T$ , d.h. $\{(t, x); 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq x_{\text{rechts}}\} \dots$	71
$G_{\text{CBVP}}(T)$	$= \{(t, x); t \in [0, T], x \in [0, \gamma_{\text{links}}(t)]\}$ , Ge- biet für <i>Character. Boundary Value Probl.</i> ..	75
$G_{\text{IVP}}$	$= \{(t, x) \in G(T); \gamma_{\text{links}}(t) \leq x \leq \gamma_{\text{rechts}}\}$ , Gebiet für <i>Initial Value Problem</i> .....	86
$G_{\text{P}}$	Gebiet, in dem entweder IVP oder CBVP gelöst werden soll.....	223
$h$	$: [0, 1] \rightarrow ]0, -\infty[$ , $C^{\infty}$ -Funktion, zu der $q_h$ , $q_{(\sigma, \tau)}$ und daraus $R_H$ konstruiert werden ..	59
$H$	lichtartige Hyperfläche, die später Ereignishorizont wird .....	16
$J^{\pm}(H)$	kausale Zukunft/Vergangenheit von $H$ , Notation aus [Hawk73, Seite 182].....	193
$K^g$	Konstante mit $K^g \geq \ \tilde{g}\  \dots$	214
$K^{\lambda}$	obere Schranke von $\tilde{\lambda}$ in der $C^0$ -Norm ....	216

$\lim_{r \rightarrow 0} f(r)$	Jede Nullfolge $\{r_n\}$ mit $r_n > 0$ konvergiert gegen diesen Grenzwert von $\{f(r_n)\}_{n \rightarrow \infty} \dots$	189
$\lim_{r \nearrow r_b} f(r)$	Jede Folge $r_n \rightarrow r_b$ mit $r_n < r_b$ konvergiert gegen diesen Grenzwert von $\{f(r_n)\}_{n \rightarrow \infty} \dots$	194
$L^f$	Lipschitz-Konstante von $f \dots \dots \dots$	215
$L^{\tau_0}$	Lipschitz-Konstante von $\partial_i \tau_0 \dots \dots \dots$	221
$m$	Masse aus [Misn68] $\dots \dots \dots$	18
$m_H(r)$	$:= \int_0^r (4\pi [\varrho_H R_H' - \{\hat{p} \circ \varrho_H + \varrho_H\} U_H] R_H^2)(x) dx \dots$	54
$M$	$:= \Gamma^2 - U^2$ , Unbekannte in (2.25) anstelle der sonst üblichen Unbekannten $\Gamma \dots \dots \dots$	28
$M_H$	Anfangsdaten für $M$ auf $H \dots \dots \dots$	43
$\tilde{M}$	Hilfsgröße zur Definition oberer Schranken	222
$M^\star$	Hilfsgröße zur Definition oberer Schranken	216
$M^{u_0}$	obere Schranke von $u_0$ in der $C^1$ -Norm $\dots$	219
$M^\gamma$	$:= 2(1 + K^\lambda)$ , obere Schranke von $\tilde{\gamma}$ in der $C^1$ -Norm $\dots$	216
$M^\lambda$	obere Schranke von $\tilde{\lambda}$ in der $C^1$ -Norm $\dots$	216
$M^{\xi_\gamma}$	Hilfsgröße zur Definition oberer Schranken	218

---

$M^{\tau_0}$	:= $\max\{1, \ t'_0\ \} \cdot M^* \cdot M^\gamma$ , obere Schranke von $\tau_0$ in der $C^1$ -Norm....	217
$n$	= $\hat{n} \circ \varrho$ , Baryonenzahldichte .....	20
N	Menge der (positiven) natürlichen Zahlen .	84
$p$	= $\hat{p}(\varrho)$ , Zustandsgleichung für den Druck als Funktion der Massenenergiedichte.....	19
$q$	kurz für $q_H$ , Konstruktion von $R_H := \mathcal{R}(q)$	61
$q$	in Abschnitt 4.5: Raumkoordinate (Masse) für Lagrangesche Koordinaten.....	129
$\hat{q}(r)$	:= $\int_0^r \hat{r}^\nu \hat{\varrho}_0(\hat{r}) \, d\hat{r}$ , Masse von $\xi = 0$ bis $r$ ....	134
$q_h$	Hilfsfunktion, um aus $h, q_{(\sigma,\tau)}$ und dann $R_H$ zu konstruieren.....	61
$q_{(\sigma,\tau)}$	:= $\kappa_\tau (q_h - \eta_\sigma)$ , um zu geg. $h$ Eigenschaf- ten von $R_H := \mathcal{R}(q_{(\sigma,\tau)})$ zu steuern.....	62
$q_H$	= $R_H'' + 4\pi \varrho_H R_H$ .....	55
$Q_0$	:= $\{\hat{q} \in C^\infty([0, \infty[); \hat{q} = q_0 \text{ auf } [0, \varepsilon],$ $\hat{q} \equiv 0 \text{ auf } [2r_b, \infty[ \}$ .....	61
$Q_1$	$\subset Q_0$ .....	64
$Q(t, \cdot)$	= $(x(t, \cdot))^{-1}$ , Umkehrung von $\tilde{q} \mapsto x(t, \tilde{q})$ ..	136
$R$	= [Krümmung der Symmetrie-Sphäre] $^{-1/2}$	18
$R_H$	Anfangsdaten für $R$ auf $H$ .....	43

R	Menge der reellen Zahlen .....	7
$R_{\geq 0}$	Menge nichtnegativer, reeller Zahlen $[0, \infty[$	7
$\mathcal{R}$	Krümmungs-Skalar $R_a^a$ , aus Ricci-Tensor $R^{ab}$ gebildet .....	7
$\mathcal{R}(q)$	Lösung $R$ von $R'' + 4\pi\rho R = q$ mit $R(0) = 0$ und $R'(0) = 1$ .....	60
$s$	Schallgeschwindigkeit $\sqrt{\bar{p}' \circ \varrho}$ .....	28
$\bar{S}$	in Abschnitt 4.5: Entropie in Euler-Koordinaten $(\bar{t}, \xi)$ .....	128
$\mathcal{S}$	Hilfsfunktion $f \mapsto \left[ x \mapsto \frac{f(x)}{x-r_b} \right]$ .....	202
$t_0$	Konstante für Anfangsdatenfläche $[t_0 = 0]$ .	71
$t_0(r)$	Parametrisierung der Anfangsdatenfläche..	27
$t^n$	$n$ -te Zeitschicht im Numerik-Teil.....	149
$T$	a-priori Zeitpunkt so, daß für $0 \leq t \leq T$ eine Aussage (z.B. a-priori-Schranke) gilt..	71
$T_i$	a-priori-Zeitpunkt zur Schranke $\Omega_{i,k}$ .....	80
$\mathcal{T}$	Abbildung, die $w$ auf Lösung $u$ des mit $w$ linearisierten Problems wirft .....	6
$u^a$	Fluid-Vektor der Raumzeit mit $u^a u_b = -1$ .	20
$u$	Lösungsvektor $(u_1, u_2, \dots, u_K)$ .....	69

$\hat{u}$	trivial propagierter Anteil von $u = (\hat{u}, \tilde{u})$ ..	33
$\tilde{u}$	nichttrivial propagierter Anteil von $u = (\hat{u}, \tilde{u})$ .....	33
$\bar{u}$	in Abschnitt 4.5: Geschwindigkeit in $\xi$ -Richtung für die 1-D-Euler-Gleichungen.	128
$\underline{u}$	Lösung des CBVP, entspricht $(u, v_-)$ des MIBVP, siehe Fußnote 22 .....	91
$u_0$	Anfangswertvorgabe für $u$ .....	84
$u_{\text{Grenze}}$	Lösung auf der Grenzcharakteristik, Ergebnis beim IVP, Vorgabe beim CBVP .	90
$U$	normierte Zeitableitung von $R$ .....	20
$U_H$	Anfangsdaten für $U$ auf $H$ .....	43
$U_b$	Hilfsfunktion $(\sigma, \tau) \mapsto \mathcal{U}_H(\varrho, \mathcal{R}(q_{(\sigma, \tau)}))(r_b)$ .....	65
$\mathcal{U}$	Funktional, liefert die Anfangsdaten- funktion $U_H = \mathcal{U}(\varrho_H, R_H)$ .....	55
$\mathcal{U}_w$	Lösung des mit $w$ linearisierten Problems .	101
$\mathcal{U}_\Omega$	$:= \{u \in C^0(G); \ u_i\  < \Omega\}$ .....	120
$U_{\text{Data}}$	Menge von die Anfangsdaten annehmenden Lösungskandidaten .....	226

*Symbolverzeichnis*

---

$U_0$	Teilmenge von $U_{\text{Data}}$ mit beschränkter $C^0$ -Norm und $\mathcal{T} _{U_0} \subset U_0$ .....	228
$U_1$	Teilmenge von $U_0$ mit beschränkter $C^1$ -Norm und kontrahierendem $\mathcal{T} _{U_1} \subset U_1$ .	229
$U_2$	Teilmenge von $U_1$ mit beschr. Lipschitz-Konstante der Ableitung und $\mathcal{T} _{U_2} \subset U_2$ ...	231
$\mathbf{v}$	zusätzliche Unbekannte $(v_-, v_+)$ .....	74
$v_t$	$= -4\pi p R^2 \partial_t R$ , Wert für $\partial_t m$ .....	28
$v_r$	$= 4\pi \rho R^2 \partial_r R$ , Wert für $\partial_r m$ .....	28
$v_{\pm}$	Hilfs-Unbekannte zum Eigenwert $\lambda_{\pm}(t, x, u)$	74
$v_1$	$v_+$ in der Diagonalisierung zu (2.25).....	115
$v_2$	$v_-$ dazu .....	115
$v_0$	Anfangswertvorgabe für $\mathbf{v}$ .....	84
$V_F$	aus Daten auf $F$ entwickelte Raumzeit ....	16
$V_H$	aus Daten auf $H$ entwickelte Raumzeit ....	16
$V$	Raumzeit $V_H \cup V_F \cup V_{\text{Vakuum}}$ .....	16
$\bar{x}_r(\bar{t})$	Bahnlinie $\bar{x}_r$ zum Zeitpunkt $\bar{t}$ .....	133
$X_k^n$	$= \{x_{k1}^n, x_{k2}^n, \dots, x_{kN^n}^n\}$ , Gitter der $k$ -ten Unbekannten in $t = t^n$ .....	149



*Symbolverzeichnis*

---

$x_{ki}^n$	$i$ -ter Knotenpunkt der $k$ -ten Unbekannten in der $n$ -ten Zeitschicht $t = t^n$ .....	149
$\hat{x}_{ki}^{n+1}$	$:= x_{ki}^n + \Delta t \cdot \lambda_{ki}^n$ , erste Näherung für $i$ -ten Knoten der $k$ -ten Unbekannten in $t = t^{n+1}$ .	152
$\hat{x}_{ki}^{n,0}$	erste Näherung $\hat{x}_{ki}^n$ beim Nachiterieren ....	157
$\hat{x}_{ki}^{n,1}$	erste Iteration (neue Näherung) für $i$ -ten Knoten der $k$ -ten Unbekannten in $t = t^n$ ...	157
$z$	$= (t, x)$ Punkt aus einem Lösungsgebiet ...	96
$Z_X$	für $X \in \{R, M, \varrho, U\}$ Zwangsbedingung $X_r - \partial_r X$ mit raumableitungsfreiem $X_r$ ...	114
$\beta$	technische Abk. in (2.25).....	28
$\gamma$	technische Abk. in (2.25).....	28
$\gamma$	(Graph einer) Charakteristik .....	74
$\gamma_{\text{links}}$	Grenz-Charakteristik, auch $\gamma_{\text{Grenze}}$ .....	76
$\tilde{\gamma}(\cdot, z)$	zu $\tilde{\lambda}$ gehörige Charakteristik durch $z$ .....	211
$\Gamma$	normierte Raumableitung von $R$ .....	20
$\Gamma_H$	$:= \sqrt{M_H + U_H^2}$ .....	54
$\Delta t$	Zeitschrittlänge $t^{n+1} - t^n$ in der Numerik..	150
$\Delta x$	in der Numerik anfänglicher Abstand (Äquidistanz) benachbarter Ortspunkte ...	165

$\tilde{\zeta}$	$: Q_1 \rightarrow ]0, +\infty]$ , Nullstellen-Sucher, $\tilde{\zeta}(q)$ ist die kleinste Nullstelle von $[\mathcal{R}(q)]'$ .....	64
$\tilde{\eta}$	Hilfsfunktion zur Definition von $\eta_\sigma$ .....	62
$\eta_\sigma$	Hilfsfunktion zum Steuern von $q'_{(\sigma,\tau)}(r_b)$ ...	62
$\vartheta$	$\in [0, \pi/2]$ , Winkel im Linienelement $ds^2$ ...	21
$\kappa$	Hilfsfunktion zur Konstruktion von $\kappa_\tau$ .....	61
$\kappa_\tau$	$:= 1 + (\tau - 1)\kappa$ , bewirkt in $q_{(\sigma,\tau)}$ , daß $R' = [\mathcal{R}(q_{(\sigma,\tau)})]'$ in $r = r_b$ verschwindet ..	61
$\lambda$	$= \ln(g_{tt})$ aus dem Linienelement $ds^2$ in den Kapiteln 2, 4 und 6 .....	21
$\lambda$	Eigenwert einer partiellen Differentialgleichung in Kapitel 3 und 5 .....	87
$\lambda_k(u)$	$k$ -ter Eigenvektor des diagonalen Systems siehe auch Abbildung 3.1 auf Seite 72 .....	71
$\lambda_\pm$	einzigster nichttrivialer Eigenwert mit $\lambda_\pm \neq 0$	74
$\tilde{\lambda}$	Prop.-richtung $\lambda$ der diagon. linearisierten Gl., d.h. $z \mapsto \lambda(z, u(z))$ .....	211
$\mathbf{\Lambda}(u)$	Diagonalmatrix vor den Raumableitungen, kurz für $\mathbf{\Lambda} \circ \bar{u} : (t, x) \mapsto \mathbf{\Lambda}(t, x, u(t, x))$ ....	7
$\nu$	1-D-Koordinaten: $\nu = 0, 1, 2$ für ebene, zylindrische und sphärische Symmetrie ....	128

---

$\xi$	in Abschnitt 4.5: Raumkoordinate für drei Arten (Parameter $\nu$ ) von 1-D-Koordinaten	128
$\xi_\gamma$	$: z \mapsto \tilde{\gamma}(\tau_0(z), z)$ liefert den Startort der durch $z$ laufenden Charakteristik $\tilde{\gamma}$ .....	221
$\varrho$	Massenenergiedichte .....	19
$\bar{\varrho}$	in Abschnitt 4.5: Massendichte in Euler-Koordinaten $(\bar{t}, \xi)$ .....	128
$\varrho_H$	Anfangsdaten für $\varrho$ auf $H$ .....	43
$\varrho_b$	(positive) Massenenergiedichte am Sternrand, d.h. $p = \hat{p}(\varrho_b) = 0$ .....	44
$\sigma$	Parameter mit $[q_{(\sigma, \tau)}]'(r_b) = \sigma$ .....	62
$\Sigma$	raumartige Anfangsfläche $\Sigma = C$ oder lichtartige Anfangsfläche $\Sigma = H$ .....	29
$\bar{\Sigma}$	Hilfsfunktion $(\sigma, \tau) \mapsto \sigma - 8\pi \varrho_b U_b(\sigma, \tau)$ ...	65
$\tau$	Parameter, um kleinste die Nullstelle von $R' = [\mathcal{R}(q_{(\sigma, \tau)})]'$ in $r = r_b$ zu positionieren	62
$\tau_0(z)$	Startzeitpunkt von $\tilde{\gamma}(\cdot, z)$ , was $\tau_0(z) = t_0(\tilde{\gamma}(\tau_0(z), z))$ nach sich zieht.....	212
$\hat{\tau}$	Kurvenparameter von $\tilde{\gamma}(\cdot, z) : \hat{\tau} \mapsto \tilde{\gamma}(\hat{\tau}, z)$ .	211
$\phi$	$= \ln(g_{rr})/2$ aus dem Linienelement $ds^2$ .....	21
$\phi_\pm$	Randwertvorgabe für $v_\pm$ .....	84
$\varphi$	$\in [0, 2\pi]$ , Winkel im Linienelement $ds^2$ .....	21

*Symbolverzeichnis*

---

$\chi(r)$	$:= \int_0^r \left[ \frac{q_H + 4\pi \hat{p}(\varrho_H) R_H}{R_H'} \right] (x) \, dx \dots\dots\dots$	55
$\Omega_{0,k}$	obere Schranke für $\ w_k\ _{C^0} \dots\dots\dots$	79
$\Omega_{1,k}$	obere Schranke für $\ w_k\ _{C^1} \dots\dots\dots$	79
$\Omega_{2,k}$	Lipschitz-Konstante für $\partial_t w_k$ und $\partial_x w_k \dots$	79

## Verzeichnis der Lemmata etc.

Bemerkungen		Lemmata (Forts.)	
2.4.8	56	2.3.8	35
2.4.12	66	2.4.1	38
3.2.7	93	2.4.2	41
Definitionen		2.4.9	58
2.4.6	54	2.4.11	61
2.4.7	55	4.3.1	108
3.2.3	88	4.3.2	111
4.2.1	105	4.5.8	135
4.5.4	132	4.5.9	136
4.5.5	132	4.5.10	138
4.5.6	132	6.1.1	181
7.2.1	211	6.1.2	183
Folgerung		6.1.3	183
2.3.5	31	6.2.1	189
Konventionen		6.2.2	190
2.3.1	25	6.2.3	191
7.2.4	215	6.3.1	194
7.2.5	215	6.3.2	196
7.2.6	215	6.3.3	198
Lemmata		6.3.4	199
2.2.1	21	6.3.5	200
2.3.2	25	6.3.6	200
2.3.3	27	6.3.7	201
2.3.4	30	6.3.8	201
2.3.6	32	6.3.9	202
2.3.7	34	6.3.10	202

*Verzeichnis der Lemmata etc.*

---

Lemmata (Forts.)		Sätze (Forts.)	
6.3.11	206	4.5.1	130
7.2.3	214	4.5.2	130
7.2.7	215	4.5.3	131
7.2.8	216	4.5.7	133
7.2.9	217	7.2.2	211
7.2.10	219	7.2.15	225
7.2.11	220		
7.2.12	221		
7.2.13	222		
7.2.16	232		
8.2.1	240		
8.2.2	241		
Probleme			
3.2.1	84		
3.2.5	90		
7.2.14	223		
Sätze			
2.4.3	44		
2.4.4	48		
2.4.5	52		
2.4.10	59		
3.2.2	85		
3.2.4	88		
3.2.6	91		
3.3.1	95		
3.3.2	98		
4.2.2	107		
4.4.1	122		

## Formelverzeichnis

(1.1) .....	1	(2.23) .....	27
(1.2) .....	1	(2.24) .....	27
(1.3) .....	4	(2.25) .....	27
(1.4) .....	6	(2.26) .....	28
(1.5) .....	7	(2.27) .....	28
(2.1) .....	18	(2.28) .....	28
(2.2) .....	19	(2.29) .....	29
(2.3) .....	19	(2.30) .....	30
(2.4) .....	19	(2.31) .....	30
(2.5) .....	20	(2.32) .....	30
(2.6) .....	20	(2.33) .....	30
(2.7) .....	20	(2.34) .....	32
(2.8) .....	21	(2.35) .....	33
(2.9) .....	21	(2.36) .....	34
(2.10) .....	21	(2.37) .....	35
(2.11) .....	21	(2.38) .....	35
(2.12) .....	21	(2.39) .....	35
(2.13) .....	22	(2.40) .....	35
(2.14) .....	22	(2.41) .....	38
(2.15) .....	22	(2.42) .....	38
(2.16) .....	23	(2.43) .....	38
(2.17) .....	25	(2.44) .....	38
(2.18) .....	25	(2.45) .....	44
(2.19) .....	25	(2.46) .....	44
(2.20) .....	25	(2.47) .....	44
(2.21) .....	25	(2.48) .....	54
(2.22) .....	26	(2.49) .....	54

*Formelverzeichnis*

---

(2.50)	.....	54	(3.2)	.....	70
(2.51)	.....	54	(3.3)	.....	70
(2.52)	.....	54	(3.4)	.....	71
(2.53)	.....	54	(3.5)	.....	73
(2.54)	.....	54	(3.6)	.....	79
(2.55)	.....	55	(3.7)	.....	84
(2.56)	.....	55	(3.8)	.....	84
(2.57)	.....	55	(3.9)	.....	85
(2.58)	.....	55	(3.10)	.....	85
(2.59)	.....	56	(3.11)	.....	89
(2.60)	.....	56	(3.12)	.....	90
(2.61)	.....	56	(3.13)	.....	90
(2.62)	.....	56	(3.14)	.....	90
(2.63)	.....	56	(3.15)	.....	91
(2.64)	.....	56	(3.16)	.....	92
(2.65)	.....	56	(3.17)	.....	93
(2.66)	.....	59	(3.18)	.....	96
(2.67)	.....	59	(3.19)	.....	96
(2.68)	.....	59	(3.20)	.....	97
(2.69)	.....	60	(3.21)	.....	97
(2.70)	.....	60	(4.1)	.....	99
(2.71)	.....	60	(4.2)	.....	100
(2.72)	.....	61	(4.3)	.....	101
(2.73)	.....	62	(4.4)	.....	101
(2.74)	.....	62	(4.5)	.....	101
(2.75)	.....	64	(4.6)	.....	101
(2.76)	.....	65	(4.7)	.....	101
(2.77)	.....	65	(4.8)	.....	102
(3.1)	.....	69	(4.9)	.....	102



---

*Formelverzeichnis*

(4.10)	.....	102	(4.39)	.....	118
(4.11)	.....	102	(4.40)	.....	120
(4.12)	.....	103	(4.41)	.....	120
(4.13)	.....	105	(4.42)	.....	120
(4.14)	.....	105	(4.43)	.....	120
(4.15)	.....	105	(4.44)	.....	121
(4.16)	.....	105	(4.45)	.....	121
(4.17)	.....	105	(4.46)	.....	121
(4.18)	.....	106	(4.47)	.....	121
(4.19)	.....	106	(4.48)	.....	124
(4.20)	.....	107	(4.49)	.....	128
(4.21)	.....	107	(4.50)	.....	128
(4.22)	.....	107	(4.51)	.....	129
(4.23)	.....	108	(5.1)	.....	148
(4.24)	.....	109	(5.2)	.....	148
(4.25)	.....	110	(5.3)	.....	148
(4.26)	.....	110	(5.4)	.....	148
(4.27)	.....	111	(5.5)	.....	150
(4.28)	.....	111	(5.6)	.....	162
(4.29)	.....	113	(5.7)	.....	163
(4.30)	.....	113	(6.1)	.....	181
(4.31)	.....	114	(6.2)	.....	181
(4.32)	.....	114	(6.3)	.....	183
(4.33)	.....	114	(6.4)	.....	185
(4.34)	.....	115	(6.5)	.....	186
(4.35)	.....	116	(6.6)	.....	193
(4.36)	.....	117	(6.7)	.....	195
(4.37)	.....	117	(6.8)	.....	199
(4.38)	.....	117	(7.1)	.....	209

*Formelverzeichnis*

---

(7.2)	.....	209	(7.31)	.....	224
(7.3)	.....	209	(7.32)	.....	226
(7.4)	.....	210	(7.33)	.....	226
(7.5)	.....	211	(7.34)	.....	226
(7.6)	.....	211	(7.35)	.....	227
(7.7)	.....	212	(7.36)	.....	230
(7.8)	.....	212	(7.37)	.....	230
(7.9)	.....	212	(8.1)	.....	237
(7.10)	.....	212	(8.2)	.....	237
(7.11)	.....	212	(8.3)	.....	238
(7.12)	.....	212	(8.4)	.....	238
(7.13)	.....	213	(8.5)	.....	238
(7.14)	.....	214	(8.6)	.....	239
(7.15)	.....	216	(8.7)	.....	239
(7.16)	.....	216	(8.8)	.....	239
(7.17)	.....	216	(8.9)	.....	240
(7.18)	.....	217	(8.10)	.....	241
(7.19)	.....	219	(8.11)	.....	242
(7.20)	.....	219			
(7.21)	.....	220			
(7.22)	.....	221			
(7.23)	.....	221			
(7.24)	.....	221			
(7.25)	.....	222			
(7.26)	.....	222			
(7.27)	.....	223			
(7.28)	.....	223			
(7.29)	.....	223			
(7.30)	.....	223			

# Tabellenverzeichnis

2.1	Die konkrete Gestalt von $q_{(\sigma,\tau)} = \kappa_\tau(q_h - \eta_\sigma)$ mit zugehörigen oberen (bzw. unteren) Schranken auf den verschiedenen Intervallen . . . . .	63
5.1	Darstellung der numerischen Fehler beim Testproblem . . . . .	175

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Raumzeit aus idealer Flüssigkeit $[V_F \cup V_H]$ . . .	16
–	Skizze zur Zustandsgleichung . . . . .	19
2.2	finale Schwarzes-Loch-Raumzeit, die sich aus $C$ entwickelt . . . . .	50
3.1	Propagationsrichtungen $\lambda_k(u) > 0$ bzw. $< 0$ .	72
3.2	Abhängigkeitsgebiete ober- und unterhalb der Grenzcharakteristik $\gamma_{\text{links}}$ , CBVP-/IVP-Gebiet	76
5.1	Skizze zur Interpolationsordnung . . . . .	151
5.2	Skizze zur Gitteranpassung am Rand . . . . .	155
5.3	Skizze zu einem Knick im Interpolationsweg . .	156
5.4	Anpassung des Gitters bei der Nachiteration .	159
5.5	Entwicklung beim Euler-Schritt (17 Ortspunkte)	166
5.6	Entwicklung beim Euler-Schritt (51 Ortspunkte)	167
5.7	Entwicklung bei beiden Verbesserungen . . . .	168
5.8	Zeitliche Entwicklung nach Halbierung von $\Delta x$	169
5.9	$u$ in $t = 1,53$ mit verschiedenen Verfahren . . .	171
5.10	$u$ -Fehler in $t = 1.53$ mit verschiedenen Verfahren	172
5.11	$v$ -Fehler in $t = 1.53$ mit verschiedenen Verfahren	173
5.12	$u$ -Fehler bei beiden $\Delta t$ und $u$ -Korrektur . . . .	176
5.13	$v$ -Fehler bei beiden $\Delta t$ und $u$ -Korrektur . . . .	177
5.14	$u$ -Fehler mit und ohne Verbessern . . . . .	180

*Abbildungsverzeichnis*

---

–	Skizze zur Anwendung des Zwischenwertsatzes auf die Parameter $\tau$ und $\sigma$ . . . . .	207
7.1	Gebiet $G_P(T)$ im IVP- bzw. CBVP-Fall . . . . .	225
7.2	Wahl von $\Delta x$ so, daß $G_{\text{IVP}}(T) \subset G_{\Delta x}(T)$ gilt .	235

# Index

- $(\varrho_H, R_H)$ -Bedingungen, 43, 45, 47, 51, 56
- $(t, r)$ -Koordinaten, 22
- $(t^*, r^*)$ -Koordinaten, 22, 46
- a-priori-Schranken, 80
- Anfangsdatenfläche, 87
  - andere, 108
- Anfangsrandwertaufgabe, 8, 148
- CBVP, 75, 90
- Charakteristik, 74
  - Grenz-, 74, 77
  - Knick-, 148
- diagonal, 99
- Diagonalisierung, 7, 114
  - Anfangsdaten, 116
- Diagonalmatrix, 1
  - der Eigenwerte  $\mathbf{\Lambda}$ , 106
- Differentialgleichungssystem
  - $(t, r)$ -Koordinaten, 33, 115
  - $(t^*, r^*)$ -Koordinaten, 35, 118
  - charakteristische Form, 70
  - diagonales, 71, 74, 148
  - Divergenz-Form, 3
  - hyperbolisch, 1, 70
- Eckbedingung, 56, 75, 95, 122
- Einsteinsche Feldgleichungen
  - ideale Flüssigkeit, 20
  - reduzierte, 25
- Entropie  $S$ , 128
- Ereignishorizont, 14, 36, 50
- Evolutionsgleichungen, 4
  - diagonalisierte, 115, 118
- Fixpunktsatz, 6, 79
- Fluid-Vektor, 20
- Hybridverfahren, 148
- Hydrodynamik, 8
- hyperbolisch, 70
- Interpolation, 149
  - Ordnung, 150
- Iteration, 79
- IVP, 75
- Knick, 77
- Koordinatensystem

- Fixierung, 22, 23, 29, 33
- Kugelsymmetrie
  - Oberflächenmaß  $R$ , 18, 20
  - Zentrum
    - Koord.-Singularität, 39
- Lipschitzkonstante (LipKon), 80
- Masse  $m$ , 18
  - wohldefiniert, 183
- Massenenergiedichte  $\rho$ , 19
- Maxwell-Gleichungen, 5, 132
- MIBVP, 69, 75, 84, 95
  - mit Knick, 111
  - mit Sprung, 98
- Numerik
  - Abstand der Ortspunkte, 165, 178
  - Parameter, 164
  - Wahl des Verfahrens, 170, 178
  - Zeitschritt, 150, 152, 154
  - Zeitschritt verbessern, 157
- quasilinear, 69
- Randwerte
  - implizite, 71
- Raumzeit
  - $V_F$ , 39
  - $V_H$ , 37
  - $[V_F \cup V_H]$ , 44
- Konstruktion
  - Schritt I, 48
  - Schritt II, 48, 52
  - kugelsymmetrische, 8
  - Koordinaten, 21
  - Vakuumraumzeit  $V_0$ , 48
- Schocks, 78
- Schwarzes Loch, 8, 48
  - Bedingung, 58
- Sprung, 77
- Sternrand, 43, 117
- Zeitentwicklungsgleich., 28
- Zustandsgleichung, 19, 128
- Zwangsbedingungen, 4, 28, 131, 187
  - $(t^*, r^*)$ -Koordinaten, 35
- Lösen, 29, 54
- Propagation, 31, 32, 107, 113, 114, 181, 183, 241

# Literaturverzeichnis

- [AlMH94] U. Alfes, H. Müller zum Hagen, *Spherically symmetric event horizons and trapped surfaces developing from innocuous data*, Classical Quantum Gravity **11** (1994), 985–1000
- [Bona95] C. Bona, J. Massó, E. Seidel, J. Stela, *A New Formalism for Numerical Relativity*, Physical Review Letters **75** (1995), 600-603
- [Bona97] C. Bona, J. Massó, E. Seidel, J. Stela, *A First order hyperbolic formalism for Numerical Relativity*, Physical Review D **56** (1997), 3405-3415
- [Cazz80] M. G. Cazzani Nieri, *An existence theorem for systems of quasilinear equations (italienisch)*, Ricerche Mat. **29** (1980), 17–64
- [Chan95] Zhu Changjiang, *Global resolvability for a viscoelastic model with relaxation*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh **125A** (1995), 1277–1285
- [Cour66] R. Courant, D. Hilbert *Methods of Mathematical Physics, vol.2: Partial Differential Equations*, Interscience, New York, <sup>3</sup>1966
- [Dieu85] J. Dieudonné, *Grundzüge der modernen Analysis, Bd. 1*, Vieweg Braunschweig, 1985



- [Gara64] P. R. Garabedien, *Partial Differential Equations*, John Wiley & Sons, Inc., (1964)
- [GrHs83] J. M. Greenberg, L. Hsiao, *The Riemann problem for system  $u_t + \sigma_x = 0$  and  $(\sigma - f(u))_t + (\sigma - \mu f(u)) = 0$* , Arch. Rational Mech. Anal. **82** (1983), 87–108
- [Hart58] D. R. Hartree, *Numerical Analysis*, Oxford, (1958)
- [Hawk73] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis *The large scale structure of space-time*, Cambridge, <sup>10</sup>1991
- [Hayw93] S. Hayward, *Trapping and Completeness of a spherical light-cone*, Gen. Rel. Grav. **25** (1993), 95–100
- [Hern66] W. C. Hernandez Jr, C.W. Misner, *Observer Time as a Coordinate in Relativistic Spherical Hydrodynamics*, Astrophys. J. **143** (1966), 452–464
- [Hern99] S. D. Hern, Ph.D. thesis, Cambridge University, 1999. zitiert nach: *Coordinate singularities in harmonically-sliced cosmologies* xxx.uni-augsburg.de/gr-qc/0001070
- [Kevo90] J. Kevorkian, *Partial Differential Equations*, Watsworth and Brooks, 1990
- [Kind91] S. Kind, *Anfangs-Randwertprobleme für die Einsteingleichungen zur Beschreibung von Flüssigkeitskugeln und deren linearisierten Störungen*, Diss., Ludwig-Maximilians-Universität München, (1991)
- [Kind92] S. Kind, J. Ehlers, *Initial-boundary-value problem for the spherically symmetric Einstein equations with perfect fluid*, Classical Quantum Gravity **10**,(1992), 2123–2136

- [Krie93] M. Kriele, *The collapse of a spherically symmetric star with linear equation of state*, Classical Quantum Gravity **10**(1993), 1341–1352
- [LeVe92] R. J. LeVeque, *Numerical Methods for Conservation Laws*, Birkäuser, 1992
- [LiWu92] Li Ta-t sien, Yu Wen-ci *Boundary Value Problems for Quasilinear Hyperbolic Systems*, Duke University Mathematics Series V, 1992
- [Male88] P. Bizon, E. Malec, N. Ó. Murchadha *Trapped surfaces in spherical stars* Phys. Rev. Lett. **61**(10), (1988), 1147–1150
- [Mass94] J. Massó, E. Seidel, P. Walker, *Adaptative Mesh Refinement in Numerical Relativity*, Proceedings of the Seventh Marcel Grossman Meeting on General Relativity, gr-qc/9412057
- [MHYS74] H. Müller zum Hagen, P. Yodzis, H.-J. Seifert, *On the occurrence of naked singularities in general relativity II* Commun. Math. Phys. **37**, (1974), 29–40
- [Mill80] J. C. Miller, D.W. Sciama, *Gravitational Collapse to the Black Hole state* in A. Held, Hrsg., *General Relativity and Gravitation*, Vol. 2, Plenum Press N.Y., 1980
- [MiSh64] C. W. Misner, D. H. Sharp *Equations for Adiabatic, Spherically Symmetric Gravitational Collapse* Phys. Rev. B **136**, (1964), 571–576
- [Misn68] C. W. Misner *Astrophysics and General Relativity*, Hrsg.: M. Chrétien, S. Deser und J. Goldstein, Gordon and Breach, New York 1968, Vol. 1, 113–216

- [Rend92] A. D. Rendall, *The initial value problem for a class of general relativistic bodies*, J. Math. Phys. **33**, (1992), 1047–1053
- [Schö83] R. Schön, S.-T. Yau, *The existence of black hole due to condensation of matter*, Commun. Math. Phys. **90**, (1983), 575–579
- [Sod78] G. A. Sod, *A Survey of Several Finite Difference Methods for Systems of Nonlinear Hyperbolic Conservation Laws*, J. Comput. Phys. **27** (1978), 1–31
- [Sod85] G. A. Sod, *Numerical Methods in Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 1985
- [Spiv79] M. Spivak, *A comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. 5, Publish or Perish Inc., Berkeley, 1979
- [Titz89] A. Titze, *Numerische Behandlung von 'shell crossing' Singularitäten beim kugelsymmetrischen Gravitationskollaps*, Diss., Universität der Bundeswehr Hamburg, 1989
- [Yang97] Tong Yang, Zhu Changjiang, Huijiang Zhao *Global smooth solutions for a class of quasilinear hyperbolic systems with dissipative terms*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh **127A** (1997), 1311–1324
- [Ying91] H. Ying, *Nonlocal initial-boundary value problems for quasilinear hyperbolic systems of equations, (chinesisch)*<sup>4</sup>, Chinese Ann. Math. Ser. A **12** (1991), 439–452

---

<sup>4</sup>Eine Übersetzung ins Deutsche verdanke ich Herrn Dr.-Ing. Jianyi Kong.

## Danksagungen

Ich danke allen, die zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen haben.

Die Anregung zur Beschäftigung mit den hier behandelten Fragen verdanke ich Prof. Dr. Henning Müller zum Hagen, der sich dazu seinerseits mit Prof. Dr. Hans-Jürgen Seifert und Prof. Dr. Bernd G. Schmidt beriet. Während meiner Zeit an der Universität der Bundeswehr hatte ich viele nützliche Fachdiskussionen mit Prof. Müller zum Hagen, der stets bereit war, sich in die Niederungen höchst technischer Details zu begeben, Prof. Seifert, Dr. Wolfgang Zeuge und Dr. Horst Beyer.

Anregend und hilfreich war auch ein kurzer Forschungsaufenthalt am Albert-Einstein-Institut in Potsdam durch Gespräche mit Prof. Schmidt und Dr. Allan D. Rendall sowie ein Gespräch mit Prof. Dr. Wolfgang Hackbusch in Kiel.

Mein größter Dank gilt meiner lieben Frau Imke Alfes, die mich nicht nur in Zeiten der geistigen Abwesenheit und Frustration ertragen hat, sondern mir auch ständig viele alltägliche Pflichten abnahm. Für ihre Geduld danke ich auch meinen Kindern Dorothee, deren gesamtes Leben lang mich diese Arbeit beschäftigt, Luise, die auch mal wieder meinen PC benutzen möchte und Konrad, der empört fragt, ob denn alle Papas eine Doktorarbeit machen müssen.

Weiter habe ich meinen Arbeitgebern zu danken, die mir eine sehr flexible Urlaubsplanung gestatteten. Namentlich danke ich Direktor Axel Kodlin von der Hamburger Sparkasse und Jürgen Hübner von der Sparkasse Bremen.

Für drucktechnische Unterstützung danke ich Dipl.-Math. Sven Bleydorn sowie meinem Bruder Dr. iur. Holger Alfes.

Die Grundlagen für diese Arbeit wurden im Studium gelegt, für dessen Finanzierung ich meinen Eltern herzlich danke.

## Lebenslauf

### Persönliche Daten

Geburt: 16.06.1964 in Bremen als erster von drei Söhnen der Hauswirtschaftsleiterin Hanna Helene Susanna Alfes und des Pastors Peter Kurt Herrmann Alfes

Heirat: 16.08.1990 mit Imke Heide Alfes geb. Bohlmann, Kunsthistorikerin M.A.

Kinder: 07.06.1991 Dorothee Charlotte  
19.02.1993 Luise Sophie  
13.03.1997 Konrad Fritz

Wohnsitz: 28213 Bremen, Schaffenrathstr. 4

### Ausbildung

1970–1974 Grundschule in Bremen  
1974–1982 Kippenberg-Gymnasium Bremen  
1983–1984 Grundwehrdienst in der Bundesluftwaffe  
1984–1985 Helfer im Hotel Schloss Elmau bei Mittenwald

### Studium

Mathematik mit Nebenfach Informatik  
1984–1985 an der TU Braunschweig und  
1985–1991 an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel  
1991 Diplom

### Berufsausübung und Weiterbildung

1991–1996 Wissenschaftlicher Mitarbeiter im Fachbereich Maschinenbau der Universität der Bundeswehr Hamburg, von 6 Monaten Erziehungsurlaub unterbrochen

1996–1997 Aufbaustudium im Studiengang Wirtschaft FH bis Vordiplom und Zertifikat Wirtschaftsinformatik, Ostdeutsche Hochschule für Berufstätige der AKAD Akademikergesellschaft Stuttgart

1997 Controlling im Dienstleistungsbereich, Bildungsmaßnahme der STB GmbH & Co., Bremen

1997–2000 kaufmännischer Angestellter im Controlling der Hamburger Sparkasse

ab 04.2000 Sachbearbeiter im Operativen Controlling und ab Dez. 2001 im Risikocontrolling der Sparkasse Bremen