Universität Hamburg
Fachbereich Informatik
Vogt-Kölln-Str. 30
D-22527 Hamburg

Bericht 240

Untersuchung der Beziehungen zwischen Eigenschaften von Petrinetzen

Simon Kohl

Juni 2002

Zusammenfassung In dieser Arbeit geht es um die Beziehungen zwischen Eigenschaften von Petrinetzen. Als Petrinetze werden S/T-Netze mit anonymen Marken betrachtet. Eine Eigenschaft stellt jeweils eine Teilmenge der Menge aller Petrinetze dar. Ziel der Arbeit ist es, ein Untersuchungsverfahren zu entwickeln, mit dem für eine gegebene Klasse von Eigenschaften alle Implikationen, die zwischen den Eigenschaften existieren, ermittelt werden können. Es wird bewiesen, daß das Verfahren genau die Implikationen findet, die zwischen den Eigenschaften existieren. Das Verfahren wurde mit einer Klasse von 11 strukturellen Eigenschaften (free-choice, Zustandsgraph, markierter Graph, u.a.) und mit einer Klasse von 15 dynamischen Eigenschaften (Lebendigkeit, Fairneß, Persistenz, u.a.) durchgeführt. Dabei wurden Implikationen gefunden, die in der betrachteten Literatur nicht erwähnt werden.

Abstract This work is concerned with the relationship between properties of petri nets. As petri nets, P/T-Nets with anonymous tokens are considered. A property represents a subset of the set of all petri nets. The objective of this work is to develop a procedure which determines for a given class of properties, all true implications between the properties. It is proven that the procedure determines exactly all implications. The procedure has been applied to a class of 11 structurally properties (free-choice, state machine, marked graph, etc.) and a class of 15 dynamically properties (liveness, fairness, persistence, etc.). In this way implications have been found which aren't mentioned in the considered literature.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Einleitung

In dieser Arbeit geht es um die Beziehungen zwischen Eigenschaften von Petrinetzen. Eine Eigenschaft stellt jeweils eine Teilmenge aller Petrinetze dar. Später wird der Begriff „Eigenschaft“ formal definiert und ab dann *Netzeigenschaft* genannt. Mit „Beziehungen“ sind Implikationen zwischen Eigenschaften gemeint. Als Petrinetze sind hier S/T-Netze mit anonymen Marken zu verstehen. Es werden zwei Arten von Eigenschaften betrachtet. Die einen beziehen sich nur auf den Netzgraphen eines S/T-Netzes, die anderen beziehen sich unter Mitbetrachtung der Marken auch auf das Verhalten eines S/T-Netzes. Erstere Netze werden hier weiterhin Petrinetze genannt.

Die Eigenschaften werden in Klassen eingeteilt. Ziel der Arbeit ist es, für jeweils eine Klasse alle Implikationen zu finden, die zwischen den Eigenschaften der Klasse bestehen. Dafür wurde ein Untersuchungsverfahren entwickelt, das es ermöglicht alle diese Implikationen zu finden und zu beweisen, daß es nur genau die gefundenen Implikationen gibt. Das Verfahren wurde an zwei konkreten Klassen durchgeführt. Dabei konnten Implikationen zwischen Eigenschaften gefunden werden, die in der betrachteten Literatur nicht erwähnt werden. Zudem sind bei der Anwendung des Untersuchungsverfahrens interessante Petrinetzbeispiele entstanden, die jeweils eine bestimmte Kombination von Eigenschaften erfüllen, wodurch die Beziehungen zwischen den Eigenschaften veranschaulicht werden.

Alle in dieser Arbeit vorkommenden Eigenschaften sind der Literatur entnommen und repräsentieren bestimmte Eigenschaften und Zustände von realen Systemen. Somit haben die hier ausgewählten Eigenschaften einen praktischen Bezug zur Modellierung und Analyse von Systemen und sind nicht bloß mathematische Objekte.

Motivation

Werden Petrinetze in der aktuellen Literatur verwendet, so handelt es sich fast ausschließlich um höhere Petrinetze. Die Arbeiten über Theorie und Anwendung von Petri- und S/T-Netzen stammen größtenteils aus den 70er und 80er Jahren des 20. Jahrhunderts. Daraus ist jedoch nicht zu schließen, daß es keinen Forschungsbedarf mehr auf diesem Gebiet gibt. Beziehungen zwischen den hier betrachteten Eigenschaften sind in der Literatur nur wenige zu finden. Eine systematische Untersuchung der Beziehungen zwischen den Eigenschaften einer bestimmten Klasse, wurde bei den Recherchen für diese Arbeit nicht gefunden. Die Relevanz solcher Beziehungen für die Systemmodellierung und -analyse kann jedoch erst nach weiteren Arbeiten eingeschätzt werden.

Aufbau der Arbeit

In Kapitel 2 werden grundlegende Definitionen zu Petrinetzen eingeführt und die zu untersuchenden Eigenschaften vorgestellt. Diese Grundlagen werden später in Kapitel 4 benötigt.

Kapitel 3 beschreibt das Untersuchungsverfahren mit dem die Implikationen zwischen Eigenschaften gefunden werden können. Das Verfahren wird formal hergeleitet und bewiesen.

In Kapitel 4 wird die Anwendung des Untersuchungsverfahrens für konkrete Klassen von Eigenschaften gezeigt. Die Ergebnisse der Anwendung, u.a. die gefundenen Implikationen werden dargestellt.

Das letzte Kapitel faßt die erzielten Erkenntnisse zusammen und bietet einen Ausblick über die weitere Verwendbarkeit des im Kapitel 3 vorgestellten Untersuchungsverfahrens. Auch die Schwächen des Verfahrens werden aufgedeckt.

2 Grundlagen und Definitionen

Dieses Kapitel enthält grundlegende Definitionen, die im weiteren Verlauf der Arbeit benötigt werden. Im ersten Abschnitt werden Notationen und Definitionen zu Aufbau und Funktionsweise von Petrinetzen eingeführt. Anhand von Beispielen werden die Definitionen erläutert. Der zweite Abschnitt stellt die Definitionen der Netzeigenschaften vor, die in dieser Arbeit untersucht werden. Jede Netzeigenschaft wird mit einer Zeichenfolge aus ein bis vier Buchstaben symbolisiert, die in einem Kasten über der jeweiligen Definition steht. Diese Symbole werden später benutzt, um die Netzeigenschaften zu referenzieren.

Die Definitionen in beiden Abschnitten sind größtenteils der Literatur entnommen, wobei Notationen und Formulierungen an einen einheitlichen Stil angepaßt sind.

2.1 Definitionen zu Petrinetzen

In dieser Arbeit werden die in der mathematischen Literatur üblichen Definitionen und Notationen für Mengen, Zahlen, Relationen, Folgen und Funktionen benutzt. Diese werden durch folgende zwei Definitionen ergänzt.

Definition 2.1. Die Zahl ω ist die Mächtigkeit der natürlichen Zahlen, d.h. $\omega = |\mathbb{N}|$.
Die Menge aller unendlichen Folgen aus Elementen einer Menge T wird mit T^ω bezeichnet.

Definition 2.2. (aus [Car87]) Die Quantoren $\overset{\infty}{\forall}$ und $\overset{\infty}{\exists}$ bedeuten *für alle bis auf endliche viele* bzw. *es gibt unendliche viele* und werden wie folgt definiert:
Sei A eine abzählbare Menge und P ein Prädikat, dann gilt:

- $\overset{\infty}{\forall}\, a \in A : P(a) \Leftrightarrow |\{a \in A | \neg P(a)\}| < \omega$
- $\overset{\infty}{\exists}\, a \in A : P(a) \Leftrightarrow |\{a \in A | P(a)\}| = \omega$

Ein Petrinetz kann als ein gerichteter Graph mit zwei Sorten von Knoten aufgefaßt werden, wobei keine zwei Knoten gleicher Sorte durch eine Kante verbunden sind. Die zwei Sorten heißen Stellen und Transitionen. Graphisch werden Stellen als Kreise und Transitionen als Rechtecke dargestellt. Abbildung 2.1 zeigt ein Petrinetz.

Definition 2.3. (aus [BF86]) Ein Tupel $N = (S, T, F)$ heißt *Petrinetz* genau dann, wenn folgendes gilt:

1. S ist eine Menge von Stellen.
2. T ist eine Menge von Transitionen.

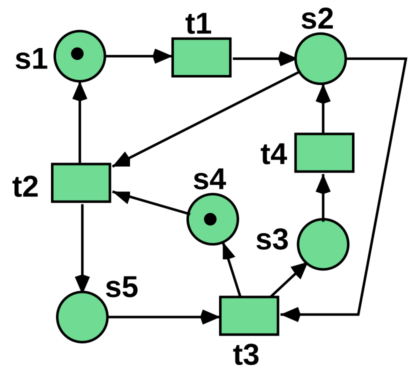


Abbildung 2.1: Ein Petrinetz oder ein S/T-Netz (wenn Anfangsmarkierung mitbetrachtet wird).

3. $S \cap T = \emptyset$
4. $S \cup T \neq \emptyset$
5. F heißt Flußrelation mit $F \subseteq (S \times T) \cup (T \times S)$

Definition 2.4. (aus [BF86]) Sei $N = (S, T, F)$ ein Petrinetz, $t \in T$ eine Transition und $s \in S$ eine Stelle.

- Die Elemente der Mengen ${}^\bullet t := \{s|(s,t) \in F\}$ und $t^\bullet =: \{s|(t,s) \in F\}$ heißen *Eingangs- bzw. Ausgangsstellen* von t.
- Die Elemente der Mengen ${}^\bullet s := \{t|(t,s) \in F\}$ und $s^\bullet =: \{t|(s,t) \in F\}$ heißen *Eingangs- bzw. Ausgangstransitionen* von s.
- Eine Stelle heißt *vorwärts-* bzw. *rückwärtsverzweigt*, wenn sie mehr als eine Ausgangs- bzw. Eingangstransition hat.
- Eine Transition heißt *vorwärts-* bzw. *rückwärtsverzweigt*, wenn sie mehr als eine Ausgangs- bzw. Eingangsstelle hat.

Vereinbarung. Es werden hier nur Petrinetze mit folgenden Eigenschaften betrachtet:

- Es existieren mindestens eine Stelle und eine Transistion, d.h. $T \neq \emptyset, S \neq \emptyset$.
- Die Anzahl der Stellen und Transitionen wird als endlich angenommen.
- Jede Stelle und jede Transition ist durch wenigstens eine Kante mit einer anderen Transition bzw. Stelle verbunden, d.h. $\neg\exists s \in S : {}^\bullet s = s^\bullet = \emptyset, \neg\exists t \in T : {}^\bullet t = t^\bullet = \emptyset$.

Dadurch werden einige Spezialfälle ausgeschlossen, die sonst in den Definitionen der Netzeigenschaften berücksichtigt werden müßten. Zudem basieren die Ergebnisse dieser Arbeit auf diesen Annahmen.

Definition 2.5. (aus [DE95]) Sei $N = (S, T, F)$ ein Petrinetz. Ein *Pfad* ist eine nichtleere Folge $x_1, \ldots, x_k$, wobei $x_i \in S \cup T$, $i = 1, \ldots, k$ und $(x_1, x_2), \ldots, (x_{k-1}, x_k) \in F$ gilt. Ein Pfad heißt *Zyklus* genau dann, wenn $x_1 = x_k$ gilt.

Als Beispiel zu den letzten beiden Definitionen, gilt für das Petrinetz in Abbildung 2.1: s_3 und s_4 sind Ausgangsstellen von t_3. t_4 ist Eingangstransition von s_2. s_1, t_1, s_2, t_2, s_1 ist ein Zyklus.

Stellen können Marken tragen, repräsentiert durch schwarze Punkte auf den Stellen. Eine Verteilung von Marken auf den Stellen eines Petrinetzes wird Markierung genannt und stellt den Zustand des Petrinetzes dar. Ein Petrinetz, in dem Marken betrachtet werden, wird Stellen/Transitions-Netz, kurz S/T-Netz genannt.

Definition 2.6. (aus [JV87]) Sei $N = (S, T, F)$ ein Petrinetz. Eine *Markierung* ist eine Abbildung $m : S \to \mathbb{N}$, die jeder Stelle eine Anzahl von Marken zuweist. Mit M_S wird die Menge aller Markierungen über S bezeichnet.

Definition 2.7. (aus [JV87]) Ein Tupel $N = (S, T, F, m_0)$ heißt *S/T-Netz* genau dann, wenn folgendes gilt:

1. (S, T, F) ist ein Petrinetz.

2. m_0 ist eine Anfangsmarkierung.

Ein S/T-Netz kann seinen Zustand ändern indem Transitionen schalten. Eine Transition kann schalten, wenn sie *aktiviert* ist. Dazu müssen alle Eingangsstellen der Transition mindestens eine Marke tragen. Beim Schaltvorgang wird von den Eingangsstellen jeweils eine Marke entfernt und den Ausgangsstellen jeweils eine Marke hinzugefügt. Ist die Anzahl der Eingangsstellen größer als die der Ausgangsstellen, werden beim Schalten Marken vernichtet. Ist die Anzahl der Eingangsstellen kleiner, werden Marken erzeugt.

Definition 2.8. (aus [JV87]) Seien $N = (S, T, F, m_0)$ ein S/T-Netz, $t \in T$ eine Transition und $m_1, m_2 \in M_S$ Markierungen.

- t heißt *aktiviert* in m_1, symbolisch $m_1 \xrightarrow{t}$, genau dann, wenn $\forall s \in {}^\bullet t : m_1(s) \geq 1$.

- t *schaltet* von m_1 nach m_2, symbolisch $m_1 \xrightarrow{t} m_2$, genau dann, wenn
$$(m_1 \xrightarrow{t}) \wedge \forall s \in S : m_2(s) := \begin{cases} m_1(s) + 1, & \text{falls } s \in t^\bullet \wedge s \notin {}^\bullet t \\ m_2(s) - 1, & \text{falls } s \notin t^\bullet \wedge s \in {}^\bullet t \\ m_1(s), & \text{sonst} \end{cases}$$

Das S/T-Netz in Abbildung 2.1 hat die Anfangsmarkierung: $m_0(s_1) = 1,\ m_0(s_2) = 0,\ m_0(s_3) = 0,\ m_0(s_4) = 1,\ m_0(s_5) = 0$, in der nur die Transition t_1 aktiviert ist. Eine Folge von Transitionen, die nacheinander geschaltet werden können, wird *Schaltfolge* genannt. Nach dem Schalten einer Transition sind die Marken auf den Stellen neu verteilt. Eine neue Markierung ist erreicht. Für eine Schaltfolge w kann die Folge von Markierungen betrachtet werden, die aus den Markierungen besteht, die während des Schaltens von w, jeweils nach dem Schalten einer Transition, erreicht werden. Eine mögliche Schaltfolge für das Netz in Abbildung 2.1 ist $w = t_1, t_2, t_1, t_3, t_4$, ausgehend von der Anfangsmarkierung m_0. Man sagt auch „w ist bei m_0 aktiviert“.

Definition 2.9. (aus [Car87]) Seien $N = (S, T, F, m_0)$ ein S/T-Netz und $m \in M_S$ eine Markierung.

- Eine endliche Folge $w = t_1, t_2, \ldots, t_n \in T^*$ heißt *bei m aktiviert*, symbolisch $m \xrightarrow{w}$, genau dann, wenn es eine Folge von Markierungen $\mu = m_1, m_2, \ldots, m_n, m_{n+1}$ gibt, so daß $m_i \xrightarrow{t_i} m_{i+1},\ m_1 = m,\ 1 \le i \le n$ gilt.
- Mit $w(i) \in T,\ 1 \le i \le n$ wird das i-te Element der Folge w bezeichnet.
- Eine unendliche Folge $w = t_1, t_2, \ldots \in T^\omega$ heißt *bei m aktiviert*, symbolisch $m \xrightarrow{w}$, genau dann, wenn jeder endliche Präfix von w bei m aktiviert ist, d.h. $\forall i \in \mathbb{N}$: $m \xrightarrow{w(1)w(2)...w(i)}$.

Definition 2.10. (aus [JV87]) Seien $N = (S, T, F, m_0)$ ein S/T-Netz und $m_1, m_2 \in M_S$ Markierungen.

- Eine endliche Folge $w \in T^*$ heißt *Schaltfolge* von N genau dann, wenn $\exists m, m' \in M_S$: $(m \xrightarrow{w} m') \wedge ((m = m' \ \wedge \ w = \lambda) \ \vee \ (m \neq m' \ \wedge \ w = t_1, \ldots, t_k,\ t_j \in T,\ j = 1, \ldots, k \ \wedge \ m_j \xrightarrow{t_j} m_{j+1},\ j = 1, \ldots, k,\ m_1 = m,\ m_{k+1} = m'))$.
- Die Menge F_N heißt *Schaltfolgenmenge* von N genau dann, wenn $F_N = \{w \in T^* | \exists m \in M_S :\ m_0 \xrightarrow{w} m\}$.
- Die Menge F_N^ω heißt *unendliche Schaltfolgenmenge* von N genau dann, wenn $F_N^\omega = \{w \in T^\omega | m_0 \xrightarrow{w}\}$.
- Mit $m_w(i)$ wird die i-te Markierung, in der zu einer endlichen oder unendlichen Schaltfolge w gehörenden Folge von Markierungen, bezeichnet.

Definition 2.11. Die Anzahl der Vorkommnisse einer Transition t in einer Schaltfolge w wird mit $|w|_t$ bezeichnet.
Die Menge aller Transitionen in einer Schaltfolge w wird mit T_w bezeichnet, d.h. $T_w := \{t|\ |w|_t \ge 1\}$.

Definition 2.12. (aus [Car87]) Seien N ein S/T-Netz und $w \in F_N^\omega$ eine unendliche Schaltfolge.

- Das Prädikat $S_f : F_N^\omega \longrightarrow \{0, 1\}$ ist für w wahr, d.h. $S_f(w) = 1$, genau dann, wenn $\forall t \in T : (\overset{\infty}{\exists}\ i \in \mathbb{N} : m_w(i) \xrightarrow{t}) \Rightarrow |w|_t = \omega$.
  w heißt dann *fair*.
- Das Prädikat $S_v : F_N^\omega \longrightarrow \{0, 1\}$ ist für w wahr, d.h. $S_v(w) = 1$, genau dann, wenn $\forall t \in T : (\overset{\infty}{\forall}\ i \in \mathbb{N} : m_w(i) \xrightarrow{t}) \Rightarrow |w|_t = \omega$.
  w heißt dann *verschleppungsfrei*.

Nach obiger Definition heißt eine unendliche Schaltfolge fair, wenn alle unendlich oft aktivierten Transitionen auch unendlich oft in der Schaltfolge auftreten. Für verschleppungsfreie Schaltfolgen ist diese Forderung etwas abgeschwächt. Hier reicht es, wenn alle permanent aktivierten Transitionen unendlich oft in der Schaltfolge auftreten. Das S/T-Netz in Abbildung 2.1 hat nur eine unendliche Schaltfolge $v = t_1(t_2, t_1, t_3, t_4)^\omega$, in der jede Transition unendlich oft vorkommt. Diese Schaltfolge ist also fair und verschleppungsfrei.

Definition 2.13. Sei $N = (S, T, F, m_0)$ ein S/T-Netz. Die Menge R_N heißt *Erreichbarkeitsmenge* genau dann, wenn $R_N = \{m \in M_S | \exists w \in T^* : \ m_0 \xrightarrow{w} m\}$.

Mit dem Begriff „Petrinetz“ wird hier ein spezieller Graph (S, T, F) bezeichnet, für den strukturelle Eigenschaften definiert sind. Dynamisches Verhalten kann an einem so definierten Petrinetz jedoch nicht betrachtet werden. Ein S/T-Netz hat neben seiner Struktur, dem Graphen (S, T, F), auch noch eine Anfangsmarkierung. Unter Anwendung der obigen Definitionen, können ausgehend von der Anfangsmarkierung Transitionen geschaltet werden, um in weitere Markierungen zu gelangen. Somit kann ein dynamisches Verhalten betrachtet werden. Für ein S/T-Netz sind daher dynamische und strukturelle Eigenschaften definiert. Diese werden im nächsten Abschnitt eingeführt.

Die Begriffe „Petrinetz“ und „S/T-Netz“ werden in der Literatur nicht einheitlich verwendet. Oft wird „Petrinetz“ als Oberbegriff für alle möglichen Arten von Petrinetzen benutzt. In [DE95] z.B. wird statt „S/T-Netz“ der Begriff „System“ verwendet. Da in dieser Arbeit die Untersuchung von strukturellen und dynamischen Eigenschaften getrennt erfolgt, wird einfach der Begriff *Netz* für Petrinetze und S/T-Netze benutzt. Ob es sich bei einem Netz, um ein Petrinetz (S, T, F) oder ein S/T-Netz (S, T, F, m_0) handelt, wird aus dem Kontext ersichtlich sein.

2.2 Eigenschaften von Netzen

2.2.1 Begriffserklärung

Bevor in den nächsten beiden Abschnitten die strukturellen und dynamischen Eigenschaften definiert werden, folgt zunächst eine allgemeine Betrachtung zum Begriff „Eigenschaft“, der hier eine formale Basis erhält.

Definition 2.14. Seien $\mathcal{N}_s$ die Menge aller Petrinetze und $\mathcal{N}_d$ die Menge aller S/T-Netze.

- Eine *strukturelle Netzeigenschaft* ist ein Prädikat E_s mit $E_s : \mathcal{N}_s \cup \mathcal{N}_d \longrightarrow \{0, 1\}$.
- Eine *dynamische Netzeigenschaft* ist ein Prädikat E_d mit $E_d : \mathcal{N}_d \longrightarrow \{0, 1\}$.

Strukturelle Netzeigenschaften beziehen sich auf den Graphen eines Netzes und können daher für Petri- und S/T-Netz betrachtet werden. Dynamische Eigenschaften hingegen beziehen sich auf das dynamische Verhalten eines Netzen und sind deshalb nur für S/T-Netze definiert.

Im weiteren Verlauf der Arbeit wird der Begriff *Netzeigenschaft* ohne die Angabe „strukturell“ oder „dynamisch“ verwendet. Ob damit eine strukturelle oder dynamische Netzeigenschaft gemeint ist, ergibt sich aus dem Kontext.

2.2.2 Definitionen struktureller Eigenschaften

Definition 2.15. $\boxed{\text{AZ}}$
Ein Netz N ist *azyklisch* genau dann, wenn es in N keinen Zyklus gibt.

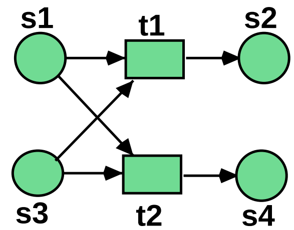


Abbildung 2.2: Netz N_2 mit den Eigenschaften: SE, AC, AZ, EFC, TE, NF.

Definition 2.16. $\boxed{\text{NF}}$ (aus [BF86])
Ein Netz $N = (S, T, F)$ ist *nebenbedingungsfrei* genau dann, wenn $\forall (s,t) \in S \times T:\ (s,t) \in F \Rightarrow (t,s) \notin F$.

Definition 2.17. $\boxed{\text{SE}}\,\boxed{\text{TE}}$ (aus [BF86])
Sei $N = (S, T, F)$ ein Netz.

- N ist *S-einfach* genau dann, wenn $\forall s_1, s_2 \in S : ({}^\bullet s_1 = {}^\bullet s_2 \ \wedge\ s_1^\bullet = s_2^\bullet) \Rightarrow s_1 = s_2$.
- N ist *T-einfach* genau dann, wenn $\forall t_1, t_2 \in T : ({}^\bullet t_1 = {}^\bullet t_2 \ \wedge\ t_1^\bullet = t_2^\bullet) \Rightarrow t_1 = t_2$.

Das Netz N_2 in Abbildung 2.2 ist azyklisch und nebenbedingungsfrei. Es ist außerdem S-einfach und T-einfach, weil es keine zwei Stellen bzw. keine zwei Transitionen gibt, die dieselben Eingangs- und Ausgangstransitionen bzw. dieselben Eingangs- und Ausgangsstellen haben. Hat ein Netz beide Eigenschaften, S-einfach und T-einfach, wird es in der Literatur auch als „schlicht" bezeichnet. Statt nebenbedingungsfrei werden auch die Begriffe „schlingenfrei" und „rein" verwendet.

Definition 2.18. $\boxed{\text{SN}}\,\boxed{\text{VSN}}$ (aus [BF86, Bau90])
Sei $N = (S, T, F)$ ein Netz.

- N ist ein *S-Netz* genau dann, wenn $\forall t \in T:\ |{}^\bullet t| = |t^\bullet| = 1$.
- N ist ein *verallgemeinertes S-Netz* genau dann, wenn $\forall t \in T : |{}^\bullet t| \leq 1 \ \wedge\ |t^\bullet| \leq 1$.

Definition 2.19. $\boxed{\text{TN}}\,\boxed{\text{VTN}}$ (aus [BF86, Bau90])
Sei $N = (S, T, F)$ ein Netz.

- N ist ein *T-Netz*[1] genau dann, wenn $\forall s \in S : |{}^\bullet s| = |s^\bullet| = 1$.
- N ist ein *verallgemeinertes T-Netz* genau dann, wenn $\forall s \in S : |{}^\bullet s| \leq 1 \ \wedge\ |s^\bullet| \leq 1$.

Ein (verallgemeinertes) S-Netz hat ausschließlich unverzweigte Transistionen. So ein Netz wird auch als „Zustandsmaschine" bezeichnet, da es sich in einen endlichen Automaten transformieren läßt, wobei die Stellen zu Zuständen und die Transitionen zu Zustandsübergängen

[1] In [Rei85] wird für ein T-Netz zusätzlich „strenger Zusammenhang" gefordert, was bedeutet, daß es von jedem Netzelement einen Pfad zu jedem anderen Netzelement geben muß. Diese Eigenschaft kann bei der Modellierung konkreter Systeme wichtig sein, was jedoch hier nicht weiter behandelt wird.

werden. S-Netze erlauben keine Synchronisation, sie können aber Konflikte enthalten. Synchronisation und Konflikte[2] sind dynamische Konzepte, d.h. das jeweilige Netz muß mit einer Anfangsmarkierung, also als S/T-Netz, betrachtet werden.

Ein (verallgemeinertes) T-Netz hat ausschließlich unverzweigte Stellen und erlaubt keine Konflikte, jedoch Synchronisation. Daher wird so ein Netz auch „Synchronisationsgraph“ oder „markierter Graph“ genannt. Die Stellen repräsentieren die Kanten und die Transitionen die Knoten in einem Graphen.

N_2 ist kein (verallgemeinertes) S-Netz, da z.B. die Transition t_1 mehr als eine Eingangsstelle hat. Um ein (verallgemeinertes) T-Netz handelt es sich bei N_2 auch nicht, da s_1 mehr als eine Ausgangstransition hat.

Definition 2.20. $\boxed{\text{FC}}$ (aus [Mur89])
Ein Netz $N = (S, T, F)$ ist ein *free-choice Netz* genau dann, wenn $\forall s_1, s_2 \in S: \; s_1^\bullet \cap s_2^\bullet \neq \emptyset \;\Rightarrow\; |s_1^\bullet| = |s_2^\bullet| = 1$.

Definition 2.21. $\boxed{\text{EFC}}$ (aus [Mur89])
Ein Netz $N = (S, T, F)$ ist ein *extended free-choice Netz* genau dann, wenn $\forall s_1, s_2 \in S:$ $s_1^\bullet \cap s_2^\bullet \neq \emptyset \;\Rightarrow\; s_1^\bullet = s_2^\bullet$.

Definition 2.22. $\boxed{\text{AC}}$ (aus [Mur89])
Ein Netz $N = (S, T, F)$ ist ein *asymmetric choice Netz* genau dann, wenn $\forall s_1, s_2 \in S:$ $s_1^\bullet \cap s_2^\bullet \neq \emptyset \;\Rightarrow\; s_1^\bullet \subseteq s_2^\bullet \vee s_2^\bullet \subseteq s_1^\bullet$.

Nach obiger Definition ist ein Netz ein free-choice Netz, wenn die Ausgangstransitionen vorwärtsverzweigter Stellen nicht rückwärtsverzweigt sind. Bei einem extended free-choice Netz haben zwei Stellen mit gemeinsamen Ausgangstransitionen alle Ausgangstransitionen gemeinsam. Asymmetric choice Netze werden auch „einfache Netze“ genannt. Das Netz N_2 ist kein free-choice Netz, da s_1 und s_3 rückwärts verzweigte Ausgangstransitionen haben. Es ist jedoch ein extended free-choice und aymmetric choice Netz, weil s_1 und s_3 dieselben Ausgangstransitionen haben.

2.2.3 Definitionen dynamischer Eigenschaften

Definition 2.23. $\boxed{\text{B}}$ (aus [BF86])
Ein Netz $N = (S, T, F, m_0)$ ist *beschränkt* genau dann, wenn $\forall s \in S : \exists b \in \mathbb{N} : \forall m \in R_N : m(s) \leq b$.

Definition 2.24. $\boxed{\text{1S}}$ (aus [BF86])
Ein Netz $N = (S, T, F, m_0)$ ist *1-sicher* genau dann, wenn $\forall s \in S : \forall m \in R_N : \; m(s) \leq 1$.

In einem beschränkten Netz existiert für jede Stelle eine obere Schranke für die Anzahl der Marken, die in keiner Markierung überschritten wird. Diese Schranke ist in einem 1-sicheren Netz gleich Eins. Das Netz N_3 in Abbildung 2.3 ist weder beschränkt noch 1-sicher, da der Stelle s_2 nur Marken hinzugefügt jedoch nicht entzogen werden können.

[2]Synchronisation: Synchronisation von nebenläufigen Aktivitäten (Schaltfolgen). Konflikt: Entscheidung welche Transition schaltet.

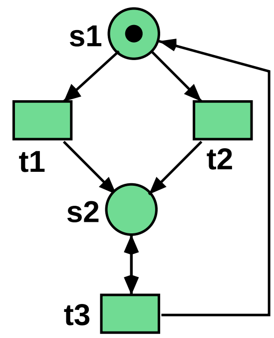


Abbildung 2.3: Netz N_3 mit den Eigenschaften: SF, KRP, 2L, 4L, 1L, NARP, 3L.

Definition 2.25. $\boxed{\text{TM}}$
Ein Netz $N = (S, T, F, m_0)$ hat eine *tote Anfangsmarkierung* genau dann, wenn $\neg \exists t \in T : m_0 \xrightarrow{t}$.

Definition 2.26. $\boxed{\text{1L}}$ $\boxed{\text{2L}}$ $\boxed{\text{3L}}$ $\boxed{\text{4L}}$ (aus [Mur89, JV87])
Sei $N = (S, T, F, m_0)$ ein Netz.

- N ist *1-lebendig* genau dann, wenn $\exists w \in F_N : \forall t \in T : \ |w|_t \geq 1$.
- N ist *2-lebendig* genau dann, wenn $\forall n \in \mathbb{N} : \exists w \in F_N : \forall t \in T : \ |w|_t \geq n$.
- N ist *3-lebendig* genau dann, wenn $\exists w \in F_N^\omega : \forall t \in T : \ |w|_t = \omega$.
- N ist *4-lebendig* genau dann, wenn $\forall t \in T : \forall m \in R_N : \exists w \in T^\omega : m \xrightarrow{w} \wedge |w|_t = \omega$

Ist in einem Netz eine endliche Schaltfolge möglich, in der jede Transition mindestens einmal vorkommt, dann ist es 1-lebendig. Gibt es zu jeder natürlichen Zahl eine endliche Schaltfolge, in der die Anzahl des Auftretens jeder Transition größer oder gleich der Zahl ist, so ist das Netz 2-lebendig. Für ein 3-lebendiges Netz muß es eine unendliche Schaltfolge geben, in der jede Transition unendlich oft vorkommt. Ein Netz ist 4-lebendig, wenn es in jeder erreichbaren Markierung eine aktivierte unendliche Schaltfolge gibt, in der jede Transition unendlich oft vorkommt. Statt 4-lebendig wird auch der Begriff „stark lebendig“ verwendet [Bau90]. In [Lau75] sind Eigenschaften, „1-live“, „2-live“ und „5-live“ genannt, für eine Markierung definiert, die angewandt auf alle erreichbaren Markierungen eines Netzes, äquivalent sind zu den Netzeigenschaften 1-lebendig bzw. 2-lebendig bzw. 4-lebendig. Das Netz N_3 ist 4-lebendig und damit auch 1,2,3-lebendig. Wäre die Kante von t_3 nach s_1 nicht vorhanden, dann wäre N_3 nicht 1,2,3,4-lebendig, weil t_1 oder t_2 nur einmal schalten könnten und die jeweils andere Transition überhaupt nicht.

Definition 2.27. $\boxed{\text{V}}$ (aus [JV87])
Ein Netz $N = (S, T, F, m_0)$ hat eine *Verklemmung* genau dann, wenn $\exists m \in R_N : \neg \exists t \in T : m \xrightarrow{t}$.

Ein Netz hat eine Verklemmung, wenn es eine erreichbare Markierung gibt, in der keine Transition mehr schalten kann. N_3 hat keine Verklemmung.

Definition 2.28. $\boxed{\text{SF}}$
Ein Netz $N = (S, T, F, m_0)$ ist *stark fair* genau dann, wenn folgendes gilt:

1. N ist 4-lebendig.
2. $\forall w \in F_N^\omega : S_f(w) \Rightarrow T_w = T$

Definition 2.29. $\boxed{\text{WF}}$
Ein Netz $N = (S, T, F, m_0)$ ist *schwach fair* genau dann, wenn folgendes gilt:

1. N ist 4-lebendig.
2. $\forall w \in F_N^\omega : S_v(w) \Rightarrow T_w = T$

Ein Netz ist stark fair, wenn in jeder fairen Schaltfolge alle Transitionen unendlich oft vorkommen. Es ist schwach fair, wenn in jeder verschleppungsfreien Schaltfolge alle Transitionen unendlich oft vorkommen. Die so definierte Art von Fairneß wird in [Mur89] auch als „unconditional fairness“ bezeichnet. In [JV87] ist Fairneß nicht als Netzeigenschaft definiert, sondern durch eine Definition von „fairem Verhalten“ und durch sogenannte „Schaltregeln“, die bestimmte Schaltfolgen ausschließen sollen. Ein 4-lebendiges Netz, das dort als „fair nach fairer Schaltregel“ bzw. „fair nach verschleppungsfreier Schaltregel“ bezeichnet wird, hat nach obigen Definitionen die Netzeigenschaft stark fair bzw. schwach fair. Warum die Definitionen zur Fairneß hier auf 4-lebendige Netze eingeschränkt sind, wird in Abschnitt 3.2 deutlich. Durch diese Einschränkung verlieren die Fairneß-Eigenschaften jedoch nicht ihren Nutzen für Anwendung von Netzen zur Modellierung von Systemen.

Das Netz N_3 hat die verschleppungsfreien Schaltfolgen $(t_1, t_3)^\omega$ und $(t_2, t_3)^\omega$, in denen t_2 bzw. t_1 niemals vorkommen. Es gibt jedoch keine faire Schaltfolgen, in denen nicht alle Transitionen unendlich oft vorkommen. Daher ist N_3 nicht schwach fair, aber stark fair.

Definition 2.30. $\boxed{\text{KRP}}$ (aus [Lau75])
Ein Netz $N = (S, T, F, m_0)$ hat *keine reproduzierbare Markierung* genau dann, wenn $\neg\exists m \in R_N : \exists w \in T^+ : m \xrightarrow{w} m$.

Definition 2.31. $\boxed{\text{NARP}}$ (aus [Lau75])
Ein Netz $N = (S, T, F, m_0)$ hat *nicht reproduzierbare Markierungen* genau dann, wenn $\neg\forall m \in R_N : \exists w \in T^+ : m \xrightarrow{w} m$.

Zur Reproduzierbarkeit gibt es in [Lau75] Definitionen für eine Markierung unter den Bezeichnungen „4-live“ und „3-live“. Um die Definitionen hier zu verwenden, wurden diese auf alle Markierungen eines Netzen erweitert und die Negationen vor die Quantoren gesetzt. Weshalb die Umformulierung mit den Negationen notwendig ist, wird in Abschnitt 3.2 erklärt.

Ein Netz hat keine reproduzierbare Markierung, wenn es keine erreichbare Markierung gibt, die durch eine nicht leere Schaltfolge von sich selbst aus erreichbar ist. Für N_3 trifft dies zu, da die Marken, die s_2 durch das Schalten von t_1 oder t_2 erhält, nicht wieder entfernt werden können. Damit ist jede Markierung nur einmal erreichbar. Auf das Netz in Abbildung 2.1 trifft dies nicht zu, da dort nur die Anfangsmarkierung nicht von einer anderen Markierung aus erreicht werden kann. Das Netz hat also nicht reproduzierbare Markierungen.

Definition 2.32. $\boxed{\text{PE}}$ (aus [LR78])
Ein Netz $N = (S, T, F, m_0)$ ist *persistent* genau dann, wenn $\forall t_1, t_2 : (t_1, t_2 \in T \wedge t_1 \neq t_2 \Rightarrow \forall m : (m \in R_N \wedge m \xrightarrow{t_1} \wedge m \xrightarrow{t_2} \Rightarrow m \xrightarrow{t_1 t_2}))$.

Persistent ist ein Netz, wenn jede einmal aktivierte Transition vor ihrem Schalten nicht wieder deaktiviert werden kann. Das Netz N_3 ist nicht persistent, weil z.B. in der Anfangsmarkierung die Transitionen t_1 und t_2 aktiviert sind, jedoch nach dem Schalten einer der beiden Transitionen die andere wieder deaktiviert ist ohne geschaltet zu haben.

Definition 2.33. $\boxed{\text{R}}$ (aus [DE95])
Ein Netz $N = (S, T, F, m_0)$ ist *reversibel* genau dann, wenn $\forall m \in R_N : \exists w \in T^* : m \xrightarrow{w} m_0$.

Definition 2.34. $\boxed{\text{T}}$
Ein Netz $N = (S, T, F, m_0)$ ist *terminierend* genau dann, wenn $F_N^\omega = \emptyset$.

Um reversibel zu sein, müssen in einem Netz alle Markierungen von jeder Markierung aus erreichbar sein. Für N_3 gilt das nicht. Die Begründung ergibt sich aus den Erläuterungen zur Reproduzierbarkeit von N_3: Alle Markierungen sind nur einmal erreichbar.

N_3 ist nicht terminierend, da es unendliche Schaltfolgen gibt. Wären die Kanten zwischen t_3 und s_1, sowie zwischen t_3 und t_2 nicht vorhanden, dann wäre es terminierend.

3 Die Untersuchung

In diesem Kapitel wird das Verfahren vorgestellt, mit dem alle Beziehungen (Implikationen) zwischen den Netzeigenschaften aus einer festgelegten Menge von Netzeigenschaften gefunden werden können. [1] So eine Menge wird hier auch als *Untersuchungsklasse* bezeichnet. Der erste Abschnitt erläutert das Grundprinzip des Verfahrens und enthält einige Begriffsdefinitionen. Im zweiten Abschnitt wird eine Methode beschrieben, um den Aufwand des Verfahrens zu reduzieren. Ihr Vorteil wird im nächsten Kapitel deutlich, wenn das Verfahren angewendet wird. Das eigentliche Untersuchungsverfahren wird dann, aufbauend auf den ersten beiden Abschnitten, im dritten Abschnitt vorgestellt.

3.1 Grundprinzip

Für eine Untersuchungsklasse $\mathcal{E}$, d.h. für eine feste Menge von Netzeigenschaften, können verschiedene Mengen von Netzen betrachtet werden. Jeder solchen Menge K wird eine Teilmenge $\mathcal{E}'$ der Untersuchungsklasse zugeordnet, wobei alle Netze aus K genau die Netzeigenschaften aus der Teilmenge erfüllen. Die Mengen unterscheiden sich voneinander hinsichtlich dieser Teilmengen und enthalten jeweils alle Netze, die genau die Netzeigenschaften aus der zugehörigen Teilmenge $\mathcal{E}'$ erfüllen. So eine Menge K von Netzen wird *Netzklasse* genannt und wie folgt definiert:

Definition 3.1. Ein Tupel $K = (\mathcal{N}, \mathcal{E}, \mathcal{E}')$ heißt *Netzklasse* genau dann, wenn folgendes gilt:

1. Die Elemente von $\mathcal{E}$ sind Netzeigenschaften, d.h. Prädikate nach Definition 2.14.
2. $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$
3. Die Menge $\mathcal{N}$ enthält alle Netze, welche die Netzeigenschaften aus $\mathcal{E}'$ erfüllen und die Netzeigenschaften aus $\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}'$ nicht erfüllen.

Definition 3.2. Ein Netz N heißt *Instanz einer Netzklasse* $K = (\mathcal{N}, \mathcal{E}, \mathcal{E}')$ genau dann, wenn $N \in \mathcal{N}$.

Eine Netzklasse wird *zulässig* genannt, wenn es wenigstens ein Netz gibt, daß die Netzeigenschaften in $\mathcal{E}'$ erfüllt und die Netzeigenschaften in $\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}'$ nicht erfüllt.

Definition 3.3. Eine Netzklasse $K = (\mathcal{N}, \mathcal{E}, \mathcal{E}')$ heißt *zulässig* genau dann, wenn $\mathcal{N} \neq \emptyset$.

[1] Durch das Verfahren werden nicht unbedingt alle Implikationen ermittelt. Alle gültigen Implikationen zwischen den bestimmten Netzeigenschaften lassen sich jedoch aus den ermittelten Implikationen ableiten.

Die oben beschriebenen Mengen von Netzen bzw. Mengen von Netzklassen für eine Untersuchungsklasse werden zu einem *Netzklassensystem* zusammengefaßt.

Definition 3.4. Ein Tupel $NKS = (\mathcal{K}, \mathcal{I})$ heißt *Netzklassensystem* genau dann, wenn folgendes gilt:

1. Die Menge $\mathcal{K}$ ist endlich und enthält Netzklassen, $\mathcal{K} = \{(\mathcal{N}_1, \mathcal{E}, \mathcal{E}'_1), \ldots, (\mathcal{N}_n, \mathcal{E}, \mathcal{E}'_n)\}$.

2. Die Elemente von $\mathcal{I}$ sind Implikationen zwischen den Netzeigenschaften in $\mathcal{E}$ mit $\mathcal{I} = \{(L_1, R_1), \ldots, (L_m, R_m)\}$, wobei $L_i = \{l_{i_1}, \ldots, l_{i_p}\}$ und $R_i = \{r_{i_1}, \ldots, r_{i_q}\}$ mit $L_i, R_i \subseteq \mathcal{E}$ die Implikationen $l_{i_1} \wedge \ldots \wedge l_{i_p} \Rightarrow r_{i_1} \vee \ldots \vee r_{i_q}$, $i = 1, \ldots, m$, repräsentieren.

3. Die Menge $\mathcal{K}$ enthält zu einer Teilmenge $\mathcal{E}'$ von $\mathcal{E}$ eine Netzklasse, wenn alle Implikationen für die erfüllten Netzeigenschaften $\mathcal{E}'$ und nicht erfüllten Netzeigenschaften $\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}'$ wahr sind, d.h.
   $\forall \mathcal{E}' \in 2^{\mathcal{E}} : (\forall (L, R) \in \mathcal{I} : \neg(L \subseteq \mathcal{E}' \wedge R \subseteq \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}')) \Rightarrow (\mathcal{N}, \mathcal{E}, \mathcal{E}') \in \mathcal{K}$.

Ein Netzklassensystem enthält also für eine Untersuchungsklasse alle Netzklassen, die unter Berücksichtigung der Implikationen möglich sind. Anders ausgedrückt, wird jede nach den Implikationen mögliche Kombination der Netzeigenschaften aus der Untersuchungsklasse durch eine Netzklasse repräsentiert. Wird die Menge $\mathcal{I}$ als leer betrachtet, enthält ein Netzklassensystem $2^{|\mathcal{E}|}$ Netzklassen. Diese Anzahl ist für konkrete Untersuchungsklassen oft um Größenordnungen niedriger, da sich entsprechend viele Implikationen finden lassen.

Für ein Netzklassensystem $(\mathcal{K}, \mathcal{I})$ ist zunächst nicht gefordert, daß alle Implikationen in $\mathcal{I}$, unter Berücksichtigung der Definitionen der Netzeigenschaften, wahr sind. Zudem wird nicht verlangt, daß alle wahren Implikationen über $\mathcal{E}$ aus den Implikationen in $\mathcal{I}$ ableitbar sind. Um nun ein Netzklassensystem zu erhalten, bei dem genau die wahren Implikationen zwischen den zugehörigen Netzeigenschaften aus den Implikationen in $\mathcal{I}$ abgeleitet werden können, wird ein *vollständiges Netzklassensystem* definiert. Ein vollständiges Netzklassensystem darf nur wahre Implikationen und zulässige Netzklassen enthalten. Durch die letzte Bedingung ist sichergestellt, daß alle wahren Implikationen über $\mathcal{E}$ aus den Elementen in $\mathcal{I}$ ableitbar sind.

Definition 3.5. Ein Netzklassensystem $NKS = (\mathcal{K}, \mathcal{I})$ heißt *vollständig* genau dann, wenn folgendes gilt:

1. Alle Implikationen aus $\mathcal{I}$ sind wahr.

2. Alle Netzklassen in $\mathcal{K}$ sind zulässig.

Satz 3.1. Sei $NKS = (\mathcal{K}, \mathcal{I})$ ein vollständiges Netzklassensystem mit $\mathcal{K} = \{(\mathcal{N}_1, \mathcal{E}, \mathcal{E}'_1), \ldots, (\mathcal{N}_n, \mathcal{E}, \mathcal{E}'_n)\}$. Dann enthält $\mathcal{I}$ Implikationen, aus denen sich genau die wahren Implikationen zwischen den Elementen von $\mathcal{E}$ ableiten lassen.

Beweis. Nach Definition 3.4 enthält $\mathcal{I}$ nur Implikationen über $\mathcal{E}$. Diese sind nach Definition 3.5 alle wahr. Es bleibt noch zu zeigen, daß alle Implikationen über $\mathcal{E}$, die wahr sind, aus den Implikationen in $\mathcal{I}$ ableitbar sind. Das folgt aus der Tatsache, daß nach Definition 3.5 alle Netzklassen in $\mathcal{K}$ zulässig sind. Demnach kann es keine weiteren wahren Implikationen geben, die nicht aus den Implikationen in $\mathcal{K}$ ableitbar sind. Würde es eine nicht zulässige Netzklasse geben, könnte zu einer Kombination von Netzeigenschaften kein Netz (Netzklasseninstanz) gefunden werden. Dies bedeutet, daß unter den aus $\mathcal{I}$ ableitbaren Implikationen noch eine Implikation fehlt, die diese Kombination von Netzeigenschaften ausschließt. Der Menge $\mathcal{I}$ müßte also noch eine Implikation hinzugefügt werden. □

Beispiel. Man betrachte für die Untersuchungsklasse $\mathcal{E} = \{4\text{L}, 3\text{L}, 2\text{L}\}$ die Netzklassen $K_1 = (\mathcal{N}_1, \mathcal{E}, \{4\text{L}, 3\text{L}, 2\text{L}\})$, $K_2 = (\mathcal{N}_2, \mathcal{E}, \{4\text{L}, 3\text{L}\})$, $K_3 = (\mathcal{N}_3, \mathcal{E}, \{3\text{L}, 2\text{L}\})$, $K_4 = (\mathcal{N}_4, \mathcal{E}, \{3\text{L}\})$, $K_5 = (\mathcal{N}_5, \mathcal{E}, \{2\text{L}\})$, $K_6 = (\mathcal{N}_6, \mathcal{E}, \emptyset)$. Zwischen den Elementen von $\mathcal{E}$ gebe es die wahren Implikationen $\{4\text{L}\Rightarrow 3\text{L}, 3\text{L}\Rightarrow 2\text{L}\}$. Ein Netzklassensystem $NKS = (\mathcal{K}, \mathcal{I})$ kann mit den Netzklassen $\mathcal{K} = \{K_1, K_2, K_4, K_6\}$ und den Implikationen $\mathcal{I} = \{4\text{L}\Rightarrow 3\text{L}, 2\text{L}\Rightarrow 4\text{L}\}$ aufgestellt werden. Zu jeder nach den Implikationen möglichen Teilmenge $\{4\text{L}, 3\text{L}, 2\text{L}\}$, $\{4\text{L}, 3\text{L}\}$, $\{3\text{L}\}$, $\emptyset$ der Untersuchungsklasse $\mathcal{E}$ gibt es eine Netzklasse. *NKS* ist nicht vollständig, da die Netzklassen K_2 und K_4 in $\mathcal{K}$ nicht zulässig sind. Durch Hinzufügen der Implikation $3\text{L}\Rightarrow 2\text{L}$ zu $\mathcal{I}$, ergibt sich eine neue Menge von Netzklassen $\mathcal{K} = \{K_1, K_6\}$. Alle Netzklassen sind nun zulässig. Die Netze N_1 und N_2 in Abbildung 3.1 sind Instanzen von K_1 bzw. K_6. Jedoch ist *NKS* immer noch nicht vollständig, weil die Implikation $2\text{L}\Rightarrow 4\text{L}$ in $\mathcal{I}$ nicht wahr ist. Wenn diese Implikation aus $\mathcal{I}$ herausgenommen wird, gilt $\mathcal{K} = \{K_1, K_3, K_5, K_6\}$ und $\mathcal{I} = \{4\text{L}\Rightarrow 3\text{L}, 3\text{L}\Rightarrow 2\text{L}\}$. Das Netzklassensystem *NKS* ist jetzt vollständig. Damit enthält $\mathcal{I}$ nach Satz 3.1 Implikationen, aus denen genau die wahren Implikationen $\{4\text{L}\Rightarrow 3\text{L}, 3\text{L}\Rightarrow 2\text{L}, 4\text{L}\Rightarrow 2\text{L}\}$ über den Netzeigenschaften in $\mathcal{E}$ abgeleitet werden können.

3.2 Aufwandsreduzierung

Im letzten Abschnitt wurde definiert, daß alle Netzklassen in einem vollständigen Netzklassensystem zulässig sind. Um für ein Netzklassensystem $(\mathcal{K}, \mathcal{I})$ die Vollständigkeit nachzuweisen, muß also u.a. für jede Netzklasse in $\mathcal{K}$ eine Instanz angegeben werden können. Dies kann bei großen Netzklassensystemen sehr aufwendig sein. Mit der in diesem Abschnitt vorgestellten Methode ist es möglich, zu einem Großteil der Netzklassen, jeweils eine Instanz automatisch zu erzeugen. Es müssen dazu nur für einen kleinen Teil der Netzklassen Instanzen bekannt sein.

Die Erzeugung von Netzen erfolgt hier durch Anwendung der *Parallelkomposition*. Die Parallelkomposition stellt eine binäre Operation dar, die aus zwei Netzen ein neues Netz erzeugt. Im folgenden wird dafür auch die Formulierung, „*zwei Netze werden parallel komponiert*“, benutzt. Ein durch die Parallelkomposition erzeugtes Netz wird auch mit „*ein parallel komponiertes Netz*“ bezeichnet. So ein Netz besteht aus den beiden Netzen, die parallel komponiert wurden, ohne das irgendwelche Netzelemente weggenommen oder hinzugefügt wurden. Das Netz ist in jedem Fall nicht zusammenhängend und kann aus beliebig vielen zusammenhängenden Teilnetzen bestehen. Formal wird die Parallelkomposition wie folgt definiert:

Definition 3.6. (aus [Gol95]) Seien $N_1 = (S_1, T_1, F_1)$ und $N_2 = (S_2, T_2, F_2)$ Netze mit $(S_1 \cup T_1) \cap (S_2 \cup T_2) = \emptyset$. Dann ist die *Parallelkomposition für Netze* von N_1 und N_2 durch $N_1 \| N_2 = (S_1 \cup S_2, T_1 \cup T_2, F_1 \cup F_2)$ definiert.

Die Instanzen der Netzklassen in einem vollständigen Netzklassensystem sollen jeweils eine andere Menge von Netzeigenschaften erfüllen. Mit der Parallelkomposition ist es möglich gezielt Netze mit bestimmten Netzeigenschaften zu erzeugen. Dazu müssen die Definitionen für die Netzeigenschaften so formuliert werden, daß das parallel komponierte Netz nur die Netzeigenschaften erfüllt, die beide Operanden-Netze gemeinsam haben. Netzeigenschaften, die auf diese Weise formuliert sind, werden *UND-Eigenschaften* genannt.

Definition 3.7. Seien N_1, N_2, N_3, N_4 Netze und E eine Netzeigenschaft. N_1 und N_2 erfüllen E. N_3 und N_4 erfüllen nicht E. Die Netzeigenschaft E heißt *UND-Eigenschaft* genau dann, wenn $N_1 \| N_2$ die Netzeigenschaft E erfüllt und $N_1 \| N_3$ sowie $N_3 \| N_4$ die Netzeigenschaft E nicht erfüllen.

Die Netzeigenschaften in Abschnitt 2.2 sind UND-Eigenschaften. Einige der dortigen Netzeigenschaften sind deshalb mit der im Vergleich zur Literatur negierten Formel definiert (z.B. die Definitionen zur Reproduzierbarkeit). Andere Definitionen wiederum müssen auf bestimmte Netze eingeschränkt werden (s. Definitionen zur Fairneß).

Korollar 3.1. Sei $\mathcal{E}$ eine Untersuchungsklasse, die aus UND-Eigenschaften besteht. Für das Netz N_1 gelten genau die Netzeigenschaften in $\mathcal{E}'_1 \subseteq \mathcal{E}$ und für das Netz N_2 gelten genau die Netzeigenschaften in $\mathcal{E}'_2 \subseteq \mathcal{E}$. Dann gelten für das parallel komponierte Netz $N_1 \| N_2$ genau die Netzeigenschaften in $\mathcal{E}'_1 \cap \mathcal{E}'_2$.

Im folgenden Beispiel wird für eine Netzeigenschaft gezeigt, daß diese eine UND-Eigenschaft ist.

Beispiel. Seien $N_1 = (S_1, T_1, F_1, m_{1_0})$ und $N_2 = (S_2, T_2, F_2, m_{2_0})$ stark faire Netze mit den fairen Schaltfolgen $u_1 \in F^\omega_{N_1}$ und $u_2 \in F^\omega_{N_2}$. Für das parallel komponierte Netz $N_\alpha = N_1 \| N_2$ sind u_1 und u_2 keine fairen Schaltfolgen, weil beim Schalten von u_1 und u_2 jeweils eine Transition aus T_2 bzw. T_1 aktiviert ist, die nicht in u_1 bzw. u_2 vorkommt. Alle fairen Schaltfolgen von N_α lassen sich aus den fairen Schaltfolgen von N_1 und N_2 konstruieren. Um eine faire Schaltfolge $u_\alpha \in F^\omega_{N_\alpha}$ von N_α zu erhalten, werden zwei faire Schaltfolgen $u_1 = u_{1_1}, u_{1_2}, \ldots \in F^\omega_{N_1}$ und $u_2 = u_{2_1}, u_{2_2}, \ldots \in F^\omega_{N_2}$ der Operanden-Netze abwechselnd geschaltet, z.B. $u_\alpha = u_{1_1}, u_{2_1}, u_{2_2}, u_{1_2}, u_{1_3}, \ldots$. Nach dem Vorkommen einer Transition aus T_1 bzw. T_2, muß nach einer endlichen Folge von Transitionen wieder eine Transition aus T_1 bzw. T_2 auftreten, damit es sich um eine faire Schaltfolge handelt. Somit kommen in jeder fairen Schaltfolge von N_α alle Transitionen aus $T_1 \cup T_2$ unendlich oft vor. N_α ist also auch stark fair.

Sei $N_3 = (S_3, T_3, F_3, m_{3_0})$ ein nicht stark faires Netz. Wenn N_3 nicht 4-lebendig ist, dann ist das parallel komponierte Netz $N_\beta = N_1 \| N_3$ ebenfalls nicht 4-lebendig und damit nicht stark fair. Ist N_3 4-lebendig, dann muß es eine faire Schaltfolge $u_3 \in F^\omega_{N_3}$ geben, in der nicht alle Transitionen aus T_3 vorkommen. Für N_β läßt sich dann eine faire Schaltfolge $u_\beta \in F^\omega_{N_\beta}$ konstruieren, indem die Schaltfolgen u_1 und u_3 abwechselnd geschaltet werden, d.h. $u_\beta = u_{1_1}, u_{3_1}, u_{1_2}, u_{3_2}, \ldots$. Da in u_3 nicht alle Transitionen aus T_3 unendlich oft auftreten, kommen auch in u_β nicht alle Transitionen aus $T_1 \cup T_3$ unendlich oft vor. Damit ist N_β nicht stark fair.

Die Netzeigenschaft „stark fair“ ist also eine UND-Eigenschaft.

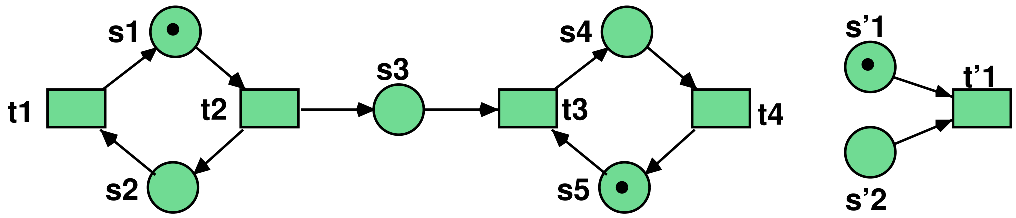


Abbildung 3.1: Netz N_1 (links) mit den Netzeigenschaften R, 4L. Netz N_2 (rechts) mit den Netzeigenschaften B, R. Netz $N_1 \| N_2$ mit der Netzeigenschaft R.

Vereinbarung. In diesem Abschnitt werden nur Netzeigenschaften betrachtet, die UND-Eigenschaften sind.

Am Anfang von diesem Abschnitt wurde angedeutet, daß in einem Netzklassensystem aus den jeweiligen Instanzen von bestimmten Netzklassen, zu allen anderen Netzklassen jeweils eine Instanz erzeugt werden kann. Im folgenden wird zunächst gezeigt, wie aus diesen bestimmten Netzklassen andere Netzklassen erzeugt werden können. Später erfolgt dann wieder, aufbauend auf die bis dahin erzielten Ergebnisse, eine Betrachtung der Erzeugung von Netzklasseninstanzen. Zu dem ursprünglichen Problem, in einem Netzklassensystem zu jeder Netzklasse eine Instanz zu finden, wird dann eine Lösung gezeigt. Um Netzklassen aus anderen zu erzeugen, wird eine Operation auf Netzklassen definiert, die gewisse Gemeinsammkeiten zur Parallelkomposition für Netze hat und daher *Parallelkomposition für Netzklassen* genannt wird.

Definition 3.8. Seien $K_1 = (\mathcal{N}_1, \mathcal{E}, \mathcal{E}'_1)$ und $K_2 = (\mathcal{N}_2, \mathcal{E}, \mathcal{E}'_2)$ Netzklassen. Dann ist die *Parallelkomposition für Netzklassen* von K_1 und K_2 folgendermaßen definiert:

$$K_1 \| K_2 = (\mathcal{N}, \mathcal{E}, \mathcal{E}'_1 \cap \mathcal{E}'_2)$$

Ähnlich wie bei der Parallelkomposition für Netze erfüllen die Instanzen der parallel komponierten Netzklassen nur die Netzeigenschaften, die von den Instanzen der Operanden-Netzklassen gemeinsam erfüllt werden. Beide Parallelkompositionen sind zudem assoziativ und kommutativ.

Beispiel. Man betrachte die Untersuchungsklasse $\mathcal{E} = \{$4L, B, R$\}$, sowie die Netzklassen $K_1 = (\mathcal{N}_1, \mathcal{E}, \{$R, 4L$\})$ und $K_2 = (\mathcal{N}_2, \mathcal{E}, \{B, R\})$. Die Netze N_1 und N_2 in Abbildung 3.1 sind Instanzen der Netzklassen K_1 bzw. K_2. Wird die Parallelkomposition für Netzklassen auf K_1 und K_2 angewendet, ergibt sich die Netzklasse $K = K_1 \| K_2 = (\mathcal{N}, \mathcal{E}, \{R\})$. Durch die Parallelkomposition für Netze entsteht das Netz $N_1 \| N_2 = (S, T, F)$, das aus beiden Netzen in Abbildung 3.1 mit $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s'_1, s'_2\}$ und $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t'_1\}$ besteht. Es erfüllt nur noch eine Eigenschaft (R) aus der Untersuchungsklasse $\mathcal{E}$ und ist eine Instanz von K.

Die Parallelkomposition für Netze kann jedoch nicht verwendet werden, um alle Instanzen einer parallelkomponierten Netzklasse K aus den Instanzen der Operanden-Netzklassen K_1

und K_2 zu erzeugen. Alle Netze, die entstehen wenn jeweils beliebige Instanzen aus K_1 mit beliebigen Instanzen aus K_2 parallel komponiert werden, sind Instanzen von K. Jedoch gibt es auch Instanzen in K, die nicht auf diese Weise erzeugt werden können. Dies sind insbesondere zusammenhängende Netze. Diese Einschränkung ist aber hier nicht weiter relevant, da es für die Untersuchung nicht erforderlich ist alle Instanzen einer Netzklasse zu erzeugen.

Definition 3.9. Eine partielle Ordnung auf der Menge der Netzklassen $\mathcal{K}$ in einem Netzklassensystem $NKS = (\mathcal{K}, \mathcal{I})$ heißt *Netzklassenordnung* $\leq^{NK}$ genau dann, wenn für zwei Netzklassen $K_1 = (\mathcal{N}_1, \mathcal{E}, \mathcal{E}'_1) \in \mathcal{K}$ und $K_2 = (\mathcal{N}_2, \mathcal{E}, \mathcal{E}'_2) \in \mathcal{K}$ folgendes gilt:
$(K_1 <^{NK} K_2 \;\Leftrightarrow\; |\mathcal{E}'_1| < |\mathcal{E}'_2|) \wedge (K_1 =^{NK} K_2 \;\Leftrightarrow\; |\mathcal{E}'_1| = |\mathcal{E}'_2|)$

Definition 3.10. Für zwei Netzklassen $K_1 = (\mathcal{N}_1, \mathcal{E}, \mathcal{E}'_1)$ und $K_2 = (\mathcal{N}_2, \mathcal{E}, \mathcal{E}'_2)$ gilt $K_1 = K_2$ genau dann, wenn $\mathcal{E}'_1 = \mathcal{E}'_2$.

Mit der Netzklassenordnung werden die Netzklassen jeweils nach der Anzahl der von ihren Instanzen erfüllten Netzeigenschaften geordnet. Zwei Netzklassen sind gleich nach Definition 3.10 und nach der Netzklassenordnung in Definition 3.9, wenn die Instanzen in beiden Netzklassen dieselben Netzeigenschaften erfüllen. Nach der Netzklassenordnung gleiche Netze müssen jedoch nicht gleich nach Definition 3.10 sein.

Beispiel. Man betrachte für die Untersuchungsklasse $\mathcal{E} = \{\text{B, 4L, R}\}$ die Netzklassen $K_1 = (\mathcal{N}_1, \mathcal{E}, \{\text{R}\}),\ K_2 = (\mathcal{N}_2, \mathcal{E}, \{\text{B}\}),\ K_3 = (\mathcal{N}_3, \mathcal{E}, \{\text{4L, B}\})$ und $K_4 = (\mathcal{N}_4, \mathcal{E}, \{\text{R}\})$. Dann gilt: $K_1 =^{NK} K_2 =^{NK} K_4,\ K_1 \neq K_2,\ K_1 = K_4,\ K_2 <^{NK} K_3,\ K_2 \neq K_3$.

Definition 3.11. Eine Netzklasse K heißt *erzeugbar in einem Netzklassensystem* $NKS = (\mathcal{K}, \mathcal{I})$ genau dann, wenn folgendes gilt:

1. $K \in \mathcal{K}$
2. $\exists \{K_1, \ldots, K_n\} \subseteq \mathcal{K} :\ K = K_1 \| \ldots \| K_n \;\wedge\; K \neq K_i,\ i = 1, \ldots, n,\ n \geq 2$

Definition 3.12. Eine Netzklasse K heißt *atomar in einem Netzklassensystem NKS* genau dann, wenn K nicht in NKS erzeugbar ist.

Die weiter oben beschriebenen bestimmten Netzklassen, aus denen alle anderen erzeugt werden können, heißen also ab jetzt atomare Netzklassen. Die folgenden Lemmata werden für den Beweis des danach folgenden Satzes benötigt.

Lemma 3.2. Sei $K = (\mathcal{N}, \mathcal{E}, \mathcal{E}')$ eine erzeugbare Netzklasse. Für die Netzklassen $K_i = (\mathcal{N}_i, \mathcal{E}, \mathcal{E}'_i)$, die K erzeugen gilt: $K <^{NK} K_i,\ i = 1, \ldots, n,\ n \geq 2,\ K_i \neq K$.

Beweis. Da die Parallelkomposition für Netzklassen assoziativ ist und $K_i \neq K \Leftrightarrow \mathcal{E}'_i \neq \mathcal{E}'$ gilt, folgt:
$\bigcap_{i \in \{1,\ldots,n\}} \mathcal{E}'_i = \mathcal{E}' \Rightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\} : \mathcal{E}' \subset \mathcal{E}'_i \Rightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\} : |\mathcal{E}'| < |\mathcal{E}'_i| \Rightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\} : K <^{NK} K_i$ (nach Definition 3.9), $n \geq 2$. □

Das obige Lemma besagt, daß eine Netzklasse nur aus, nach der Netzklassenordnung, größeren Netzklassen parallel komponiert werden kann. Die wird aus folgender Überlegung deutlich. Die Instanzen der erzeugenden Netzklassen müssen mindestens eine Netzeigenschaft mehr erfüllen, als die Instanzen der zu erzeugenden Netzklasse, weil durch die Parallelkomposition nur die gemeinsamen Netzeigenschaften der Operanden erhalten bleiben.

Beispiel. Die Netzklasse $K = (\mathcal{N}, \mathcal{E}, \{\mathrm{B}\})$ kann aus den Netzklassen $K_1 = (\mathcal{N}_1, \mathcal{E}, \{\mathrm{R, B}\})$ und $K_2 = (\mathcal{N}_2, \mathcal{E}, \{\mathrm{B, 4L}\})$ erzeugt werden.

Lemma 3.3. Die größten Netzklassen $(K_i)_{i \in I'}$ in einem Netzklassensystem $(\mathcal{K}, \mathcal{I})$ sind atomar, $I = \{1, \ldots, |\mathcal{K}|\},\ I' \subseteq I,\ K_j <^{NK} K_i,$ für alle $i \in I',$ für alle $j \in I \setminus I'$. Wenn $|I'| = 1$, dann sind auch die zweitgrößten Netzklassen $(K_h)_{h \in I''}$ atomar, $I'' \subseteq I \setminus I',\ K_j <^{NK} K_h <^{NK} K_i,$ für alle $h \in I'',$ für alle $j \in (I \setminus I') \setminus I'',$ für alle $i \in I'$.

Beweis. Eine erzeugbare Netzklasse K kann nach Lemma 3.2 nur aus Netzklassen erzeugt werden, die nach der Netzklassenordnung größer als K sind. Da $K_j <^{NK} K_i,$ für alle $i \in I',$ für alle $j \in I \setminus I'$, gilt, gibt es jedoch keine Netzklassen, die größer sind als die Netzklassen $(K_i)_{i \in I'}$. Daher sind alle $(K_i)_{i \in I'}$ atomar. Nach Lemma 3.2 und Definition 3.11 muß es für eine erzeugbare Netzklasse K mindestens zwei Netzklassen geben, die nach der Netzklassenordnung größer sind als K. Wenn $|I'| = 1$ gilt, gibt es für die zweitgrößten Netzklassen $(K_h)_{h \in I''}$ jedoch nur eine solche Netzklasse. Also sind $(K_h)_{h \in I''}$ dann auch atomar. □

Lemma 3.4. Sei $NKS = (\mathcal{K}, \mathcal{I})$ ein Netzklassensystem. Für eine erzeugbare Netzklasse $K \in \mathcal{K}$ gibt es nach Definition 3.11 eine Menge von Netzklassen $\mathcal{K}' \subset \mathcal{K}$, die K erzeugen. Wird in $\mathcal{K}'$ eine erzeugbare Netzklasse gegen ihre erzeugenden Netzklassen ausgetauscht, so erzeugen die Netzklassen in $\mathcal{K}'$ immer noch K.

Beweis. Vor dem Austausch gilt $\mathcal{K}' = \{K_1, \ldots, K_n\}$ und $K_1 \| \ldots \| K_j \| \ldots \| K_n = K,\ K \neq K_i,\ i = 1, \ldots, n,\ n \geq 2$. Die Netzklasse $K_j,\ j \in \{1, \ldots n\}$ sei erzeugbar und wird durch die Netzklassen $K_{j_1}, \ldots, K_{j_m},\ K_j \neq K_{j_k},\ K_{j_k} \in \mathcal{K},\ k = 1, \ldots, m,\ m \geq 2$ erzeugt. Wird K_j durch die $(K_{j_k})_{k \in \{1,\ldots,m\}}$ in $\mathcal{K}'$ ausgetauscht, ergibt sich $K_1 \| \ldots \| (K_{j_1} \| \ldots \| K_{j_m}) \| \ldots \| K_n = K$, da die Parallelkomposition assoziativ ist. □

Satz 3.5. Jede erzeugbare Netzklasse K in einem Netzklassensystem *NKS* kann aus atomaren Netzklassen von *NKS* erzeugt werden.

Beweis. Nach Definition 3.11 gibt es für K eine Menge $\mathcal{K}' = \{K_1, \ldots, K_n\} \subset \mathcal{K}$ von Netzklassen, die K erzeugen, $K \neq K_i,\ i = 1, \ldots, n,\ n \geq 2$. Sind alle K_i atomar, ist nichts zu tun. Ansonsten wird im folgenden o.B.d.A. eine erzeugbare $K_j \in \mathcal{K}',\ j \in \{1, \ldots, n\}$, betrachtet. Nach Lemma 3.2 gilt $K <^{NK} K_j$, d.h. es gibt eine endliche Anzahl $e = |\mathcal{K}'|$ von Netzklassen, die für die Erzeugung von K in Frage kommen. Es handelt sich dabei um die e größten Netzklassen nach der Netzklassenordnung (Definition 3.9). K_j kann gegen Netzklassen $K_{j_1}, \ldots, K_{j_m},\ m \geq 2$, die K_j erzeugen, in $\mathcal{K}'$ ausgetauscht werden. Es gilt $K_j <^{NK} K_{j_k},\ k = 1, \ldots, m$, d.h. zur Erzeugung von K_j kommen nur noch höchstens $e - 1$ der größten Netzklassen in Frage.

In weiteren Schritten wird jeweils eine erzeugende Netzklasse, aus den im jeweils vorherigen Austauschschritt hinzugekommenen Netzklassen, ausgewählt. Diese Netzklasse wird dann wiederum gegen ihre erzeugenden Netzklassen ausgetauscht. Bei jedem dieser Schritte verringert sich die Anzahl der größten Netzklassen, die für die Erzeugung der ausgetauschten Netzklassen in Frage kommen, um mindestens Eins.

Wenn nicht schon vorher alle Netzklassen, die eine ausgetauschte Netzklasse erzeugen, atomar sind, stehen nach endlich vielen Schritten nur noch atomare Netzklassen aus *NKS* zur Erzeugung zur Verfügung, da nach Lemma 3.3 die größten und eventuell auch die zweitgrößten Netzklassen immer atomar sind.

Das obige Verfahren kann rekursiv auf alle erzeugenden Netzklassen in $\mathcal{K}'$ angewandt werden bis alle Netzklassen in $\mathcal{K}'$ atomar sind. Nach Lemma 3.4 erzeugen die Netzklassen in $\mathcal{K}'$ nach jedem Austauschschritt immer noch K. □

Mit Satz 3.5 ist nun bewiesen, daß in einem Netzklassensystem mit bestimmten Netzklassen (atomare Netzklassen) alle anderen Netzklassen erzeugt werden können. Ein Algorithmus zur Bestimmung der atomaren Netzklassen für ein gegebenes Netzklassensystem wird im nächsten Abschnitt vorgestellt. Aussagen über das Verhältnis der Anzahl der atomaren Netzklassen zu der Anzahl der erzeugenden Netzklassen in einem Netzklassensystem können im nächsten Kapitel anhand von konkreten Untersuchungsklassen gemacht werden.

Wie weiter oben bereits angekündigt, wird nun geklärt, wie aufgrund der bisherigen Erkenntnisse zu jeder Netzklasse in einem Netzklassensystem eine Instanz gefunden werden kann.

Satz 3.6. In einem Netzklassensystem $NKS = (\mathcal{K}, \mathcal{I})$ sei $K = (\mathcal{N}, \mathcal{E}, \mathcal{E}') \in \mathcal{K}$ eine Netzklasse, die durch die atomaren Netzklassen $K_1, \ldots, K_n,\ K_i \in \mathcal{K},\ i = 1, \ldots, n,\ n \geq 2$ erzeugt wird. Eine Instanz $N \in \mathcal{N}$ kann erzeugt werden, indem aus jeder Netzklasse $K_i = (\mathcal{N}_i, \mathcal{E}, {\mathcal{E}'}_i)$ eine beliebige Instanz $N_i \in \mathcal{N}_i,\ i = 1, \ldots, n$ ausgewählt wird und dann diese ausgewählten Instanzen parallel komponiert werden, $N = N_1 \| \ldots \| N_n$.

Beweis. Das Netz N_i erfüllt die Netzeigenschaften in ${\mathcal{E}'}_i,\ i = 1, \ldots, n$. Aus der Assoziativität der Parallelkomposition und Korollar 3.1 folgt, daß das parallel komponierte Netz $N = N_1 \| \ldots \| N_n$ die Netzeigenschaften in $\mathcal{E}' = \bigcap_{i \in \{1,\ldots,n\}} {\mathcal{E}'}_i$ erfüllt. Dies sind nach Definition 3.8 genau die von den Instanzen der Netzklasse $K = K_1 \| \ldots \| K_n$ erfüllten Netzeigenschaften. Also ist das Netz N eine Instanz der Netzklasse K. □

Durch Satz 3.6 wurde gezeigt, wie eine beliebige Instanz einer erzeugenden Netzklasse gefunden werden kann. Demnach muß für jede atomare Netzklasse eine beliebige Instanz bekannt sein. Mit Anwendung der Parallelkomposition für Netze könnte dann zu jeder erzeugbaren Netzklasse eine Instanz angegeben werden. Damit wäre die Existenz einer Instanz zu jeder Netzklasse in einem Netzklassensystem gezeigt.

Somit liegt die Aufwandsreduzierung darin, daß nur zu den atomaren Netzklassen Instanzen gefunden werden müssen, um die Existenz von Instanzen für alle Netzklassen nachzuweisen. Die in diesem Abschnitt gewonnene Erkenntnis wird in einem Korollar zusammengefaßt.

Korollar 3.2. Wenn zu jeder atomaren Netzklasse in einem Netzklassensystem $(\mathcal{K}, \mathcal{I})$ eine Instanz angegeben werden kann, dann existiert zu jeder Netzklasse in $\mathcal{K}$ eine Instanz.

3.3 Das Untersuchungsverfahren

Im folgenden wird, unter Verwendung der Ergebnisse der letzten beiden Abschnitte, das Verfahren beschrieben, mit dem Implikationen ermittelt werden, aus denen alle Implikationen zwischen den Netzeigenschaften einer Untersuchungsklasse abgeleitet werden können. Abbildung 3.2 zeigt das Verfahren als Flußdiagramm dargestellt. Daraus wird deutlich, daß

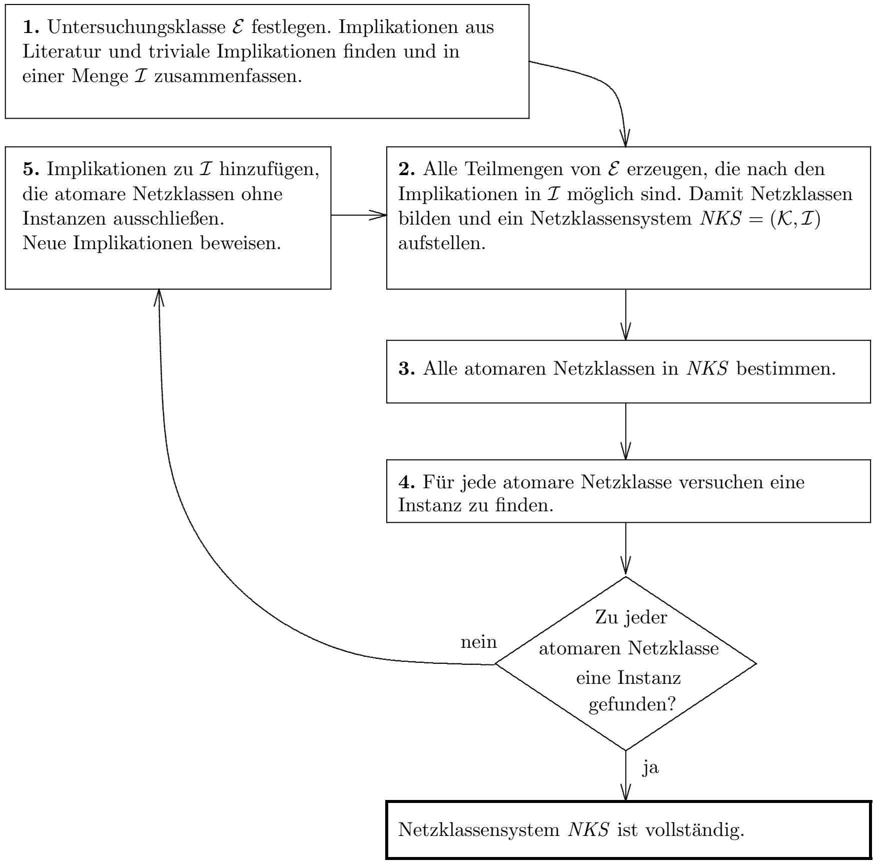


Abbildung 3.2: Flußdiagramm des Verfahrens.

es sich um ein iteratives Verfahren handelt[2].
(Schritt $x.y - z$ bezieht sich auf Handlung z in Abbildung $x.y$.)

Schritt 3.2-1 Es werden die Netzeigenschaften ausgewählt, deren Implikationen untereinander gefunden werden sollen. Diese Netzeigenschaften bilden die Untersuchungsklasse $\mathcal{E}$. Die Netzeigenschaften müssen UND-Eigenschaften sein. Bekannte Implikationen werden der Literatur entnommen. Triviale Implikationen lassen sich eventuell direkt aus den Definitionen der Netzeigenschaften herleiten. Die so gefundenen Implikationen werden in einer Menge $\mathcal{I}$ zusammengefaßt.

Schritt 3.2-2 Ein neues Netzklassensystem $NKS = (\mathcal{K}, \mathcal{I})$ wird aufgestellt. Dazu werden für die Netzklassen in $\mathcal{K}$, alle möglichen Teilmengen von $\mathcal{E}$ erzeugt, die nach den Implikationen in $\mathcal{I}$ möglich sind. Diese Erzeugung erfolgt mittels einer speziellen, im Rahmen dieser

[2] Mit „iterativem Verfahren“ ist hier nicht ein Näherungsverfahren im Sinne der Mathematik gemeint, sondern ein Verfahren mit einer Schleife und zugehöriger Abbruchbedingung im Sinne der Informatik.

Arbeit entwickelten Software[3].

Schritt 3.2-3 Die atomaren Netzklassen in $\mathcal{K}$ werden ermittelt, ebenfalls mittels einer speziellen Software. Ein entsprechender Algorithmus wird weiter unten vorgestellt.

Schritt 3.2-4 Zu jeder atomaren Netzklasse wird versucht eine Instanz zu finden. Konnte zu jeder atomaren Netzklasse eine Instanz gefunden werden, ist das Netzklassensystem *NKS* vollständig und das Verfahren ist beendet. Sonst geht es weiter mit Schritt 3.2-5.

Schritt 3.2-5 Es werden Implikationen zu $\mathcal{I}$ hinzugefügt, so daß von den atomaren Netzklassen in $\mathcal{K}$ genau diejenigen aus dem Netzklassensystem *NKS* ausgeschlossen werden, zu denen keine Instanzen in Schritt 3.2-4 angegeben werden konnten. Alle neu hinzugekommenen Implikationen müssen wahr sein. Weiter geht es dann mit Schritt 3.2-2.

Ausgehend von einer kleinen Anzahl von Implikationen, wird in jeder Iteration die Anzahl der Implikationen erhöht bis alle Implikationen gefunden sind. Wenn zu einer atomaren Netzklasse keine Instanz gefunden werden kann, dann besteht der Verdacht, daß es keine solche Instanz gibt. Möglicherweise gibt es dann eine weitere Implikation, die diese atomare Netzklasse ausschließt. Kann diese Implikation bewiesen werden, d.h. die Implikation ist wahr, wird sie zur Menge $\mathcal{I}$ hinzugefügt und die nächste Iteration beginnt.

Das Verfahren endet nach Schritt 3.2-4, wenn zu jeder atomaren Netzklasse in $\mathcal{K}$ eine Instanz angegeben werden konnte. Nach Korollar 3.2 existiert dann zu jeder Netzklasse in $\mathcal{K}$ eine Instanz. Der Menge $\mathcal{I}$ wurden nur wahre Implikationen hinzugefügt. Also ist das Netzklassensystem *NKS* nach Definition 3.5 vollständig. Nach Satz 3.1 enthält damit die Menge $\mathcal{I}$ Implikationen, aus denen genau die wahren Implikationen über den Netzeigenschaften in der Untersuchungsklasse $\mathcal{E}$ abgeleitet werden können, womit das Ziel der Untersuchung erreicht ist.

Die Komplexität des Verfahrens in Abbildung 3.2 wird durch das Erzeugen aller Teilmengen von $\mathcal{E}$ in Schritt 3.2-2 dominiert. Als Komplexität kann also $\mathcal{O}(2^m)$ angegeben werden, wenn m die Anzahl der Netzeigenschaften in der Untersuchungsklasse $\mathcal{E}$ ist.

Im folgenden wird der oben erwähnte Algorithmus zur Auffindung atomarer Netzklassen in einem Netzklassensystem vorgestellt. Der Algorithmus ist in Abbildung 3.3 als Flußdiagramm dargestellt. Für eine gegebene Netzklasse in einem Netzklassensystem entscheidet der Algorithmus, ob diese atomar oder erzeugbar ist. Um alle atomaren Netzklassen in einem Netzklassensystem *NKS* zu finden, wird der Algorithmus auf jede Netzklasse in *NKS* angewendet.

Als Voraussetzung für die Anwendung des Algorithmus, müssen die Netzklassen in einem Netzklassensystem $(\mathcal{K},\mathcal{I})$ über einen Index nach der Netzklassenordnung absteigend geordnet sein, d.h. $K_{i+1} <^{NK} K_i,\ i = 1,\ldots,|\mathcal{K}|-1,\ K_l \in \mathcal{K},\ l = 1,\ldots,|\mathcal{K}|$. $K_j \in \mathcal{K}$ sei eine Netzklasse, die geprüft werden soll, $3 \leq j \leq |\mathcal{K}|$.

[3] Mittels eines Algorithmus, der auf Baumrekursion basiert, wird die Potenzmenge der Untersuchungsklasse $\mathcal{E}$ erzeugt. Für jede erzeugte Teilmenge $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ wird geprüft, ob die Netzklasse $(\mathcal{N},\mathcal{E},\mathcal{E}')$ unter Berücksichtigung der Implikationen in das Netzklassensystem gehört. Ist das der Fall wird $\mathcal{E}'$ in textueller Form, wie in Anhang A dargestellt, in eine Datei geschrieben.

Schritt 3.3-1 Der Zähler i dient zur Referenzierung der aktuellen Netzklasse und wird zunächst auf $j-1$ gesetzt und später schrittweise um jeweils Eins verringert. Es werden also nur die Netzklassen betrachtet, die nach der Netzklassenordnung größer als K_j sind. Die künstliche Netzklasse K' stellt in jedem Schleifendurchlauf das aktuelle Ergebnis der Parallelkomposition aller bisher betrachteten erzeugenden Netzklassen dar.

Schritt 3.3-2 Es wird geprüft, ob die Instanzen der Netzklasse K_i alle Netzeigenschaften erfüllen, die auch von K_j erfüllt werden. Ist das der Fall, geht es weiter mit Schritt 3.3-3, sonst mit Schritt 3.3-5.

Schritt 3.3-3 Die Netzklasse K_i kommt für die Erzeugung von K_j in Frage und wird mit K' parallel komponiert. Weiter geht es mit Schritt 3.3-4.

Schritt 3.3-4 Es wird geprüft, ob K' gleich K_j ist. Trifft dies zu, ist der Algorithmus beendet mit dem Ergebnis, daß K_j nicht atomar ist. Ansonsten geht es weiter mit Schritt 3.3-5.

Schritt 3.3-5 Wenn der Zähler i Eins ist, gibt es keine weiteren Netzklassen mehr, die mit K' parallel komponiert werden könnten. Der Algorithmus ist dann beendet mit dem Ergebnis, daß K_j atomar ist. Ist i nicht Eins, geht es weiter mit Schritt 3.3-6.

Schritt 3.3-6 i wird um Eins verringert. Weiter geht es mit Schritt 3.3-2.

Die Korrektheit des Algorithmus läßt sich folgendermaßen zeigen. Es wird wieder eine Netzklasse $K_j = (\mathcal{N}_j, \mathcal{E}, \mathcal{E'}_j)$ aus einem Netzklassensystem $(\mathcal{K}, \mathcal{I})$ angenommen, für die geprüft werden soll, ob sie atomar oder erzeugbar ist.

Aus Definition 3.8 läßt sich ableiten, daß die Instanzen jeder Operanden-Netzklasse mindestens die Netzeigenschaften erfüllen müssen, die die Instanzen der daraus parallel komponierten Netzklasse erfüllen sollen. Nach Definition 3.11 kann die zu erzeugende Netzklasse nicht zu ihren erzeugenden Netzklassen gehören. Für die Netzklasse K_j wird eine Menge $\mathcal{K}_j = \{K_{\alpha_1}, \ldots K_{\alpha_m}\}$ gebildet mit $K_{\alpha_l} = (\mathcal{N}_{\alpha_l}, \mathcal{E}, \mathcal{E'}_{\alpha_l}) \in \mathcal{K},\ l = 1, \ldots, m$, dessen Elemente Netzklassen sind, die nach obigen Aussagen für die Erzeugung von K_j in Frage kommen, d.h. $\mathcal{E'}_j \subset \mathcal{E'}_{\alpha_l},\ l = 1, \ldots, m$. Angenommen es existiert eine Menge $\tilde{\mathcal{K}}$, dessen Elemente Netzklassen sind, die K_j erzeugen. Dann gilt $\tilde{\mathcal{K}} \subseteq \mathcal{K}_j$ und $K_{\alpha_1} \| \ldots \| K_{\alpha_m} = K_j$. Die Netzklassen aus $\mathcal{K}_j$ erzeugen dann also auch K_j. Diese Tatsache läßt sich wie folgt zeigen.

Da $\mathcal{K}_j$ alle potentiell erzeugenden Netzklassen von K_j enthält, ist $\tilde{\mathcal{K}} = \{K_{\beta_1}, \ldots, K_{\beta_n}\},\ K_{\beta_s} = (\mathcal{N}_{\beta_s}, \mathcal{E}, \mathcal{E'}_{\beta_s}),\ s = 1, \ldots, n,\ n \le m$ eine Teilmenge von $\mathcal{K}_j$. Daraus folgt, daß es für alle $s \in \{1, \ldots, n\}$ ein $l \in \{1, \ldots, m\}$ gibt, so daß $\mathcal{E'}_{\beta_s} = \mathcal{E'}_{\alpha_l}$ gilt. Daher ergibt sich aus $\bigcap_{s \in \{1,\ldots,n\}} \mathcal{E'}_{\beta_s} = \mathcal{E'}_j$ und $\mathcal{E'}_j \subset \mathcal{E'}_{\alpha_l},\ l = 1, \ldots, m$ die Gleichung $\bigcap_{l \in \{1,\ldots,m\}} \mathcal{E'}_{\alpha_l} = \mathcal{E'}_j$, d.h. die Netzklassen in $\mathcal{K}_j$ erzeugen auch K_j.

Um nun zu testen, ob K_j erzeugbar ist, müssen also alle Netzklassen K_{α_l} mit $\mathcal{E'}_j \subset \mathcal{E'}_{\alpha_l}$, $l = 1, \ldots, m$ parallel komponiert werden. Ist das Ergebnis gleich K_j, dann ist K_j erzeugbar, sonst atomar. Der Algorithmus in Abbildung 3.3 basiert auf diesem Prinzip, jedoch ist dort noch eine zusätzliche Maßnahme zur Reduzierung des Aufwands realisiert. Durch die Abfrage in Schritt 3.3-2 werden nur die oben beschriebenen Netzklassen $(K_{\alpha_l})_{l \in \{1,\ldots,m\}}$

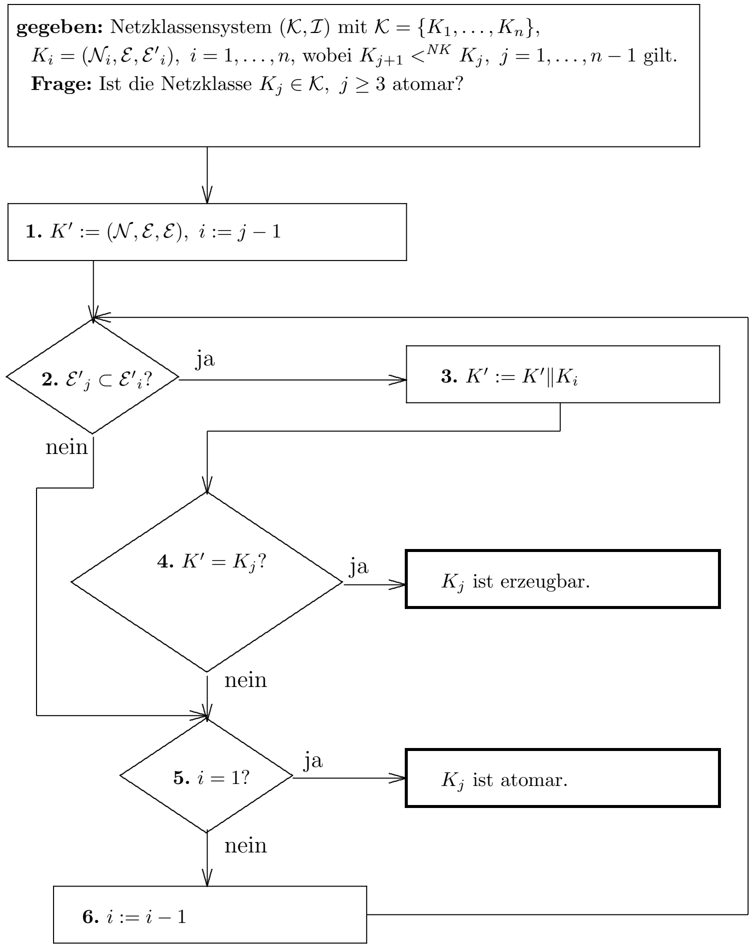


Abbildung 3.3: Flußdiagramm für den Algorithmus, der entscheidet, ob eine Netzklasse atomar oder erzeugbar ist.

betrachtet. Es werden jedoch nicht alle K_{α_l} sofort parallel komponiert, sondern in jedem Schleifendurchlauf (Schritt 3.3-2 bis -6) wird das bisherige Ergebnis K' mit einer weiteren Netzklasse K_{α_l} parallel komponiert. Dann wird geprüft (Schritt 3.3-4), ob die bis dahin betrachteten Netzklassen schon K_j erzeugen. In der Regel werden nicht alle Netzklassen $(K_{\alpha_l})_{l\in\{1,\ldots,m\}}$ für die Erzeugung von K_j benötigt. Somit wird der Aufwand etwas reduziert, wenn davon ausgegangen wird, daß eine Parallelkomposition teurer ist als ein Vergleich von zwei Netzklassen. Das Setzen des Zählers i in Schritt 3.3-1 verhindert, daß die zu erzeugende Netzklasse K_j selbst als potentiell erzeugende Netzklasse betrachtet wird. Zudem werden so $n-(j-1)$ Abfragen in Schritt 3.3-2 gespart.

Der Zähler i wird unabhängig von einer Bedingung in jedem Schleifendurchlauf um Eins verringert. Wenn die Schleife nicht schon nach Schritt 3.3-4 abbricht, dann spätestens nach Schritt 3.3-5, wenn $i = 1$ ist. Daher terminiert der Algorithmus für jede Eingabe.

Um in einem Netzklassensystem mit n Netzklassen eine Netzklasse auf Erzeugbarkeit zu testen, müssen maximal n Netzklassen parallel komponiert werden. Sollen alle atomaren Netzklassen gefunden werden, d.h. alle Netzklassen werden getestet, ergibt sich eine Komplexität von $\mathcal{O}(n^2)$.

4 Anwendung des Untersuchungsverfahrens

In diesem Kapitel wird die Anwendung, des im letzten Kapitel vorgestellten Untersuchungsverfahrens, an zwei Untersuchungsklassen gezeigt. Der erste Abschnitt beschreibt den Verlauf der Untersuchung beider Untersuchungsklassen nach dem Verfahren aus Abschnitt 3.3. Im zweiten Abschnitt finden sich die Implikationen, die die Ergebnisse der Untersuchungen darstellen. Der letzte Abschnitt enthält die Instanzen zu den atomaren Netzklassen für beide Untersuchungsklassen.

4.1 Verlauf der Untersuchung

Die Untersuchung wurde für zwei Untersuchungsklassen $\mathcal{E}_S$ und $\mathcal{E}_D$, eine mit 11 strukturellen und eine mit 15 dynamischen Netzeigenschaften, durchgeführt. Abschnitt 2.2 enthält die Definitionen zu diesen Netzeigenschaften, die alle nach Definition 3.7 UND-Eigenschaften sind. Im folgenden sind die Netzeigenschaften mit ihren Abkürzungen aufgeführt.

Untersuchungsklasse $\mathcal{E}_S$		Untersuchungsklasse $\mathcal{E}_D$	
azyklisch	$\boxed{\text{AZ}}$	beschränkt	$\boxed{\text{B}}$
nebenbedingungsfrei	$\boxed{\text{NF}}$	1-sicher	$\boxed{\text{1S}}$
S-einfach	$\boxed{\text{SE}}$	hat tote Anfangsmarkierung	$\boxed{\text{TM}}$
T-einfach	$\boxed{\text{TE}}$	1-lebendig	$\boxed{\text{1L}}$
S-Netz	$\boxed{\text{SN}}$	2-lebendig	$\boxed{\text{2L}}$
verallgemeinertes S-Netz	$\boxed{\text{VSN}}$	3-lebendig	$\boxed{\text{3L}}$
T-Netz	$\boxed{\text{TN}}$	4-lebendig	$\boxed{\text{4L}}$
verallgemeinertes T-Netz	$\boxed{\text{VTN}}$	hat Verklemmung	$\boxed{\text{V}}$
free-choice Netz	$\boxed{\text{FC}}$	stark fair	$\boxed{\text{SF}}$
extended free-choice Netz	$\boxed{\text{EFC}}$	schwach fair	$\boxed{\text{WF}}$
asymmetric choice Netz	$\boxed{\text{AC}}$	hat keine reproduzierbare Markierung	$\boxed{\text{KRP}}$
		hat nicht reproduzierbare Markierungen	$\boxed{\text{NARP}}$
		persistent	$\boxed{\text{PE}}$
		reversibel	$\boxed{\text{R}}$
		terminierend	$\boxed{\text{T}}$

Für $\mathcal{E}_S$ können sechs, für $\mathcal{E}_D$ können sieben Implikationen zwischen den Netzeigenschaften direkt aus den jeweiligen Definitionen hergeleitet werden. Zu den dynamischen Netzeigenschaften finden sich zusätzlich zwei Implikationen in der Literatur. Die bisherigen Handlungen entsprechen Schritt 1 des Untersuchungsverfahrens aus Abschnitt 3.3. Die einzelnen

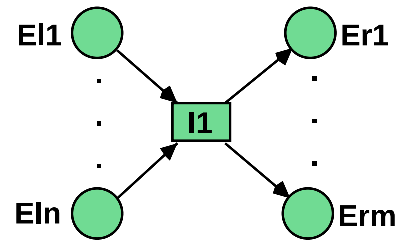


Abbildung 4.1: Die Implikation $I_1 : E_{l_1}, \ldots, E_{l_n} \Rightarrow E_{r_1}, \ldots, E_{r_m}$ als Faktennetz.

Iterationen mit ihren Zwischenergebnissen, die während der Anwendung des Untersuchungsverfahrens durchlaufen wurden, sind hier nicht dargestellt. Es werden nur die Endergebnisse, d.h. die vollständigen Netzklassensysteme betrachtet. Das vollständige Netzklassensystem für $\mathcal{E}_S$ besteht aus 10 Implikationen und 83 Netzklassen, wovon 11 atomar sind. Für $\mathcal{E}_D$ besteht das vollständige Netzklassensystem aus 23 Implikationen und 114 Netzklassen, wovon 25 atomar sind. Die Netzklassen beider vollständigen Netzklassensysteme sind im Anhang A dargestellt. Die Implikationen sind mit Beweisen in Abschnitt 4.2 aufgeführt. In Abschnitt 4.3 befinden sich die Instanzen zu den atomaren Netzklassen. Die Ergebnisse der Untersuchung von $\mathcal{E}_S$ und $\mathcal{E}_D$ sind in folgenden Korollaren zusammengefaßt.

Korollar 4.1. Aus den in Abschnitt 4.2.2 aufgeführten Implikationen lassen sich genau die wahren Implikationen zwischen den Netzeigenschaften in $\mathcal{E}_S$ ableiten.

Korollar 4.2. Aus den in Abschnitt 4.2.3 aufgeführten Implikationen lassen sich genau die wahren Implikationen zwischen den Netzeigenschaften in $\mathcal{E}_D$ ableiten.

4.2 Implikationen

4.2.1 Formulierungsweise

Die Implikationen in jedem der folgenden Unterabschnitte beziehen sich jeweils auf eine Untersuchungsklasse $\mathcal{E}$. Zur besseren Übersicht steht über jedem Satz, in einem Kasten, die entsprechende Implikation mit den Abkürzungen der Netzeigenschaften formuliert. Dabei steht die Notation $E_{l_1}, \ldots, E_{l_n} \Rightarrow E_{r_1}, \ldots, E_{r_m},\ E_{l_i} \in E_l,\ i = 1, \ldots, n,\ E_{r_j} \in E_r,\ j = 1, \ldots, m,\ E_l, E_r \subseteq \mathcal{E},\ E_l \cap E_r = \emptyset$ für die Implikation $E_{l_1} \wedge \ldots \wedge E_{l_n} \Rightarrow E_{r_1} \vee \ldots \vee E_{r_m}$.

Aufgrund dieser Formulierungsweise können die Implikationen einer Untersuchungsklasse in einem *Faktennetz* [Rei85] dargestellt werden. In einem Faktennetz wird die Implikation I_1 mit $E_{l_1}, \ldots, E_{l_n} \Rightarrow E_{r_1}, \ldots, E_{r_m}$ durch das Netz in Abbildung 4.1 ausgedrückt. Die Abbildungen 4.2 und 4.4 enthalten die Faktennetze für die Implikationen aus Abschnitt 4.2.2 bzw. Abschnitt 4.2.3. Die Zahl x in einer Transition entspricht der Nummer des entsprechenden Satzes 4.2.2.x bzw. 4.2.3.x. Die Stellen enthalten die Abkürzungen der Netzeigenschaften.

4.2.2 Implikationen zur Untersuchung der strukturellen Netzeigenschaften

Satz 4.2.2.1. $\boxed{\mathrm{AZ} \Rightarrow \mathrm{NF}}$
Wenn ein Netz azyklisch ist, dann ist es nebenbedingungsfrei.

Beweis. Eine Nebenbedingung in einem Netz stellt immer einen Zyklus dar. Ein azyklisches Netz kann daher keine Nebenbedingung haben. □

Satz 4.2.2.2. $\boxed{\text{SN} \Rightarrow \text{VSN}}$
Ein S-Netz ist ein verallgemeinertes S-Netz.

Beweis. Diese Implikation folgt direkt aus Definition 2.18. □

Satz 4.2.2.3. $\boxed{\text{TN} \Rightarrow \text{VTN}}$
Ein T-Netz ist ein verallgemeinertes T-Netz.

Beweis. Diese Implikation folgt direkt aus Definition 2.19. □

Satz 4.2.2.4. $\boxed{\text{VSN} \Rightarrow \text{FC}}$
Ein verallgemeinertes S-Netz ist ein free-choice Netz.

Beweis. Diese Implikation folgt direkt aus den Definitionen 2.18 und 2.20. □

Satz 4.2.2.5. $\boxed{\text{VTN} \Rightarrow \text{FC}}$
Ein verallgemeinertes T-Netz ist ein free-choice Netz.

Beweis. Diese Implikation folgt direkt aus den Definitionen 2.19 und 2.20. □

Satz 4.2.2.6. $\boxed{\text{FC} \Rightarrow \text{EFC}}$
Ein free-choice Netz ist ein extended free-choice Netz.

Beweis. Diese Implikation folgt direkt aus den Definitionen 2.20 und 2.21. □

Satz 4.2.2.7. $\boxed{\text{EFC} \Rightarrow \text{AC}}$
Ein extended free-choice Netz ist ein asymmetric choice Netz.

Beweis. Diese Implikation folgt direkt aus den Definitionen 2.21 und 2.22. □

Satz 4.2.2.8. $\boxed{\text{VSN} \Rightarrow \text{SE}}$
Ein verallgemeinertes S-Netz ist S-einfach.

Beweis. Angenommen ein Netz $N = (S, T, F)$ sei nicht S-einfach. Dann gilt nach Definition 2.17 $\exists s_1, s_2 \in S : ({}^\bullet s_1 = {}^\bullet s_2 \wedge s_1^\bullet = s_2^\bullet \wedge s_1 \neq s_2)$. Es muß also wenigstens eine Transition t geben, für die $|{}^\bullet t| > 1 \vee |t^\bullet| > 1$ gilt. N wäre damit kein verallgemeinertes S-Netz. □

Satz 4.2.2.9. $\boxed{\text{VTN} \Rightarrow \text{TE}}$
Ein verallgemeinertes T-Netz ist T-einfach.

Beweis. Angenommen ein Netz $N = (S, T, F)$ sei nicht T-einfach. Dann gilt nach Definition 2.17 $\exists t_1, t_2 \in T : ({}^\bullet t_1 = {}^\bullet t_2 \wedge t_1^\bullet = t_2^\bullet \wedge t_1 \neq t_2)$. Es muß also wenigstens eine Stelle s geben, für die $|{}^\bullet s| > 1 \vee |s^\bullet| > 1$ gilt. N wäre damit kein verallgemeinertes T-Netz. □

Satz 4.2.2.10. $\boxed{\text{TN, SN, AZ} \Rightarrow \perp}$
Es gibt kein Netz, das T-Netz und S-Netz ist und azyklisch ist.

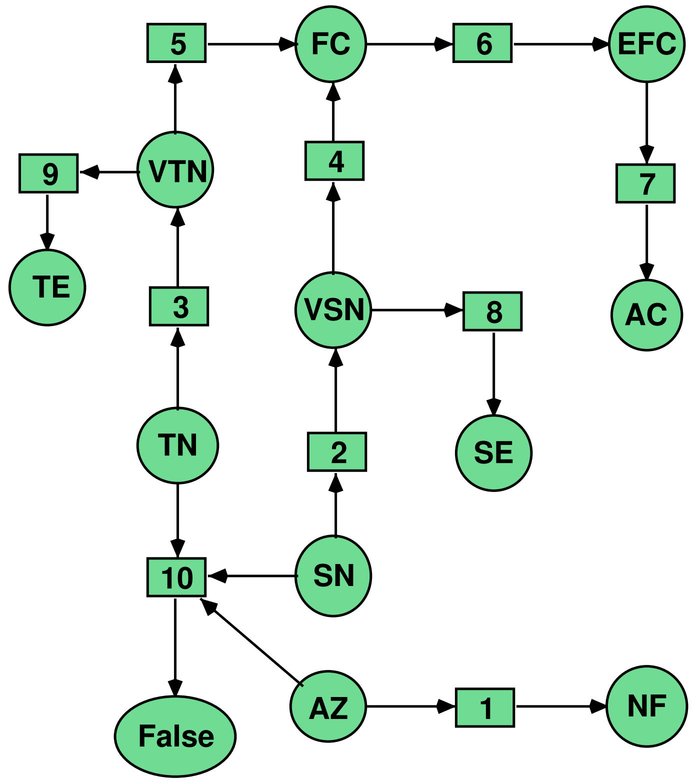


Abbildung 4.2: Die Implikationen für die Untersuchungsklasse $\mathcal{E}_S$ als Faktennetz.

Beweis. Für ein Netz $N = (S, T, F)$, daß S- und T-Netz ist gilt: $|^\bullet t| = |t^\bullet| = |^\bullet s| = |s^\bullet| = 1,\ \forall s \in S,\ \forall t \in T$. Das Netz ist also weder stellen- noch transitionsverzweigt. Somit gehört jede Stelle und Transition zu einem einzigen Zyklus, aus dem das Netz besteht. Es kann also nicht azyklisch sein. □

4.2.3 Implikationen zur Untersuchung der dynamischen Netzeigenschaften

Die folgenden Lemmata werden für einige Beweise gebraucht.

Lemma 4.1. (aus [Bau90, S. 86])
In einem Netz erzeugen alle Schaltfolgen, die Permutationen einer vorgegebenen Schaltfolge sind, die gleiche Markierung.

Lemma 4.2. Sei $N = (S, T, F, m_0)$ ein persistentes Netz. Sind die Transitionen $t_1, t_2 \in T,\ t_1 \neq t_2$ in einer Markierung $m \in R_N$ aktiviert, dann gilt $m \xrightarrow{t_1 t_2} m' \wedge m \xrightarrow{t_2 t_1} m'$.

Beweis. Nach der Definition 2.32 von Persistenz bleibt nach dem Schalten einer der beiden Transitionen t_1 oder t_2 die jeweils andere aktiviert. Die Tatsache, daß beide Schaltfolgen t_1, t_2 und t_2, t_1 in dieselbe Markierung m' führen, ergibt sich aus Lemma 4.1. □

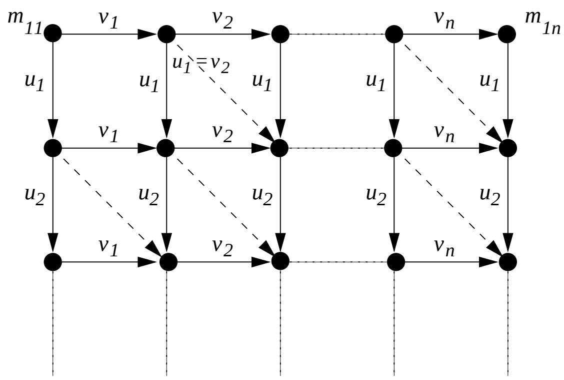


Abbildung 4.3: Erreichbarkeitsgraph zu Lemma 4.3.

Lemma 4.3. Sei $N = (S, T, F, m_0)$ ein persistentes Netz. In einer Markierung $m \in R_N$ ist die unendliche Schaltfolge $u \in T^\omega,\ u = u_1, u_2, \ldots$ aktiviert. Dann ist in jeder von m aus erreichbaren Markierung $m' \in R_N,\ m \xrightarrow{v} m',\ v \in T^*$, die Schaltfolge u aktiviert, wenn $u_1 \notin T_v$ gilt.

Beweis. Es läßt sich der Ausschnitt aus dem Erreichbarkeitsgraph von N in Abbildung 4.3 betrachten. $v = v_1, \ldots, v_n$ ist die Schaltfolge, die von $m = m_{1,1}$ nach $m' = m_{1,n}$ führt. Lemma 4.2 kann auf jede Markierung, die während des Schaltens von u oder v entsteht, angewendet werden. Somit gilt $m_{i,j} \xrightarrow{u_i v_j} m_{i+1,j+1} \wedge m_{i,j} \xrightarrow{v_j u_i} m_{i+1,j+1},\ i = 1, \ldots,\ j = 1, \ldots n$ mit $m = m_{1,1}$ und $m = m_{1,n}$, falls $u_i \neq v_j$. Wenn $u_i = v_j$, dann gilt $m_{i,j} \xrightarrow{u_i} m_{i+1,j+1} \wedge m_{i,j} \xrightarrow{v_j} m_{i+1,j+1},\ i = 2, \ldots,\ j = 2, \ldots, n$ (gestrichelte Kanten im Erreichbarkeitsgraphen). Die Markierungen $m_{i,j+1}$ und $m_{i+1,j}$ existieren dann nicht. Die Schaltfolge u bleibt in jeder Markierung der Markierungsfolge von v aktiviert, also gilt $m' \xrightarrow{u}$. □

Lemma 4.4. Sei $N = (S, T, F, m_0)$ ein persistentes Netz mit einer unendlichen Schaltfolge $u \in F_N^\omega,\ u = u_1, u_2, \ldots$. Dann ist in jeder beliebigen Markierung $m \in R_N$ ein unendlicher Suffix von u aktiviert.

Beweis. Die Schaltfolge $v = v_1, \ldots, v_n$ schaltet in die Markierung m, $m_0 \xrightarrow{v} m$. v hat die Markierungsfolge $\mu = m_0, \ldots, m_n,\ m_i \xrightarrow{v_{i+1}} m_{i+1},\ m_n = m,\ i = 0, \ldots, n-1$.
Fall 1: $u_1 \notin T_v$: Nach Lemma 4.3 ist u in m aktiviert.
Fall 2: $u_1 \in T_v$: In v kommen $p \leq n$ Transitionen vor, die unter Beibehaltung ihrer Reihenfolge einen Präfix $v' = v'_1, \ldots, v'_p,\ v'_i \in T_v,\ v_i = u_i,\ i = 1, \ldots, p$, von u bilden. Diese Transitionen treten nicht notwendigerweise hintereinander in v auf.

Die Zahl $s - 1$ gibt die Länge des Präfixes von v' an, der schon geschaltet hat, $1 \leq s \leq p$. v'_s ist also die nächste Transition, die in v' schalten kann. Die Schaltfolge $\tilde{v}$ ist ein Teilstück von v mit $\tilde{v} = v_l, \ldots, v_{l+q},\ v_i \neq v'_s,\ i = l, \ldots, l+q,\ 0 \leq l \leq n-q,\ m_{l-1} \xrightarrow{\tilde{v}} m_{l+q},\ m_{l-1} \xrightarrow{u'}$, $u' = u_s, u_{s+1}, \ldots,\ 1 \leq q \leq n-1$. Nach Lemma 4.3 gilt $m_{l+q} \xrightarrow{u'}$.

Ist in einer Markierung $m_i,\ s-1 \leq i \leq n-1$, die Transition v'_s aktiviert, so ist keine Schaltfolge $\tilde{v}$ aktiviert. Mit $m_i \xrightarrow{v'_s} m_{i+1},\ m_i \xrightarrow{u_s}$ wird also v und v' um jeweils eine

Transition weitergeschaltet. In m_{i+1} ist dann das unendliche Suffix $u_{s+1}, u_{s+2}, \ldots$ von u aktiviert.

Jede Transition $v_i,\ i = 1, \ldots, n$, von v gehört also entweder zu einer oben beschriebenen Schaltfolge $\tilde{v}$ oder entspricht der ersten Transition des Suffix von v', dessen Transitionen noch nicht geschaltet haben. Die Schaltfolge v kann aus mehreren verschiedenen Schaltfolgen $\tilde{v}$ und mehreren Teilstücken von v' bestehen, die sich abwechseln. Nach dem Schalten einer Schaltfolge $\tilde{v}$ oder eines Teilstücks von v' ist ein unendlicher Suffix von u aktiviert. Damit ist auch in $m_n = m$ ein unendlicher Suffix von u aktiviert, was zu zeigen war.

□

Lemma 4.5. Ein terminierendes Netz hat nur endlich viele Schaltfolgen.

Beweis. Da ein terminierendes Netz N keine unendlichen Schaltfolgen hat, ist der Erreichbarkeitsgraph von N azyklisch und hat nur endlich lange Pfade. Zudem ist der Verzweigungsgrad endlich, da die Anzahl der Transitionen in einem Netz endlich ist. Somit gibt es nur endlich viele Schaltfolgen in einem terminierenden Netz. □

Satz 4.2.3.1. $\boxed{\text{1S} \Rightarrow \text{B}}$
Wenn ein Netz 1-sicher ist, dann ist es beschränkt.

Beweis. Diese Implikation folgt direkt aus den Definitionen 2.24 und 2.23. □

Satz 4.2.3.2. $\boxed{\text{4L} \Rightarrow \text{3L}}$
Wenn ein Netz 4-lebendig ist, dann ist es 3-lebendig.

Beweis. Diese Implikation folgt direkt aus Definition 2.26. □

Satz 4.2.3.3. $\boxed{\text{3L} \Rightarrow \text{2L}}$
Wenn ein Netz 3-lebendig ist, dann ist es 2-lebendig.

Beweis. Diese Implikation folgt direkt aus Definition 2.26. □

Satz 4.2.3.4. $\boxed{\text{2L} \Rightarrow \text{1L}}$
Wenn ein Netz 2-lebendig ist, dann ist es 1-lebendig.

Beweis. Diese Implikation folgt direkt aus Definition 2.26. □

Satz 4.2.3.5. $\boxed{\text{2L, T} \Rightarrow \perp}$
Es gibt kein Netz, das 2-lebendig und terminierend ist.

Beweis. In einem 2-lebendigen Netz gibt es zu jeder Schaltfolge, in der alle Transitionen mindestens n-mal vorkommen, $n \in \mathbb{N}$, eine Zahl $m \in \mathbb{N}$, die größer als n ist. Somit muß es unendlich viele Schaltfolgen geben, damit es zu jeder natürlichen Zahl eine Schaltfolge gibt, in der die Anzahl des Auftreten jeder Transition größer oder gleich dieser Zahl ist. Ein terminierendes Netz hat nach Lemma 4.5 nur endlich viele Schaltfolgen. Daher kann ein terminierendes Netz nicht 2-lebendig sein.

□

Satz 4.2.3.6. $\boxed{\text{4L, V} \Rightarrow \perp}$
Es gibt kein Netz, das 4-lebendig ist und eine Verklemmung hat.

Beweis. Diese Implikation folgt direkt aus den Definitionen 2.26 und 2.27. □

Satz 4.2.3.7. $\boxed{\text{SF} \Rightarrow \text{4L}}$
Wenn ein Netz stark fair ist, dann ist es 4-lebendig.

Beweis. Diese Implikation folgt direkt aus Definition 2.28. □

Satz 4.2.3.8. $\boxed{\text{WF} \Rightarrow \text{SF}}$
Wenn ein Netz schwach fair ist, dann ist es stark fair.

Beweis. In einem schwach fairen Netz N, kommen in jeder verschleppungsfreien Schaltfolge alle Transitionen unendlich oft vor. Da nach [Car87, Seite 21] jede faire Schaltfolge auch verschleppungsfrei ist, kommen auch in jeder fairen Schaltfolge von N alle Transitionen unendlich oft vor. Damit ist N stark fair. □

Satz 4.2.3.9. $\boxed{\text{PE, 2L} \Rightarrow \text{4L}}$
Wenn ein Netz persistent und 2-lebendig ist, dann ist es 4-lebendig.

Beweis. Die Implikation PE, 2L $\Rightarrow$ 3L folgt aus einem Lemma in [LR78, S. 356]. Es bleibt noch die Implikation PE, 3L $\Rightarrow$ 4L zu zeigen:

Ein Netz N sei persistent und 3-lebendig. Es gibt daher eine unendliche Schaltfolge $w \in F_N^\omega$, in der alle Transitionen unendlich oft vorkommen. Aufgrund von Lemma 4.4 ist in jeder Markierung $m \in R_n$ ein unendliches Suffix von w aktiviert. Damit ist N 4-lebendig, was zu zeigen war. □

Satz 4.2.3.10. $\boxed{\text{R, 1L} \Rightarrow \text{4L}}$
Wenn ein Netz reversibel und 1-lebendig ist, dann ist es 4-lebendig.

Beweis. Für ein 1-lebendiges Netz gibt es eine Schaltfolge w, in der jede Transition mindestens einmal vorkommt, $m_0 \xrightarrow{w} m'$. Da N reversibel ist, gibt es für jede Markierung m eine Schaltfolge w_m, die in der Anfangsmarkierung m_0 endet, $m \xrightarrow{w_m} m_0$. So läßt sich für jede Markierung m eine unendliche Schaltfolge $u = w_m, (w, w_{m'})^\omega$ konstruieren, die unendlich oft über die Anfangsmarkierung führt und unendlich oft die Schaltfolge w enthält. Damit kommt jede Transition unendlich oft in u vor. Definition 2.26 für ein 4-lebendiges Netz ist somit erfüllt. □

Satz 4.2.3.11. $\boxed{\text{T} \Rightarrow \text{V}}$
Wenn ein Netz terminierend ist, dann hat es eine Verklemmung.

Beweis. Ein terminierendes Netz hat keine unendlichen Schaltfolgen. Am Ende jeder endlichen Schaltfolge, befindet sich das Netz in einer Markierung, in der keine Transition aktiviert ist. □

Satz 4.2.3.12. $\boxed{\text{T} \Rightarrow \text{KRP}}$
Wenn ein Netz terminierend ist, dann hat es keine reproduzierbare Markierung.

Beweis. Damit eine Markierung m reproduzierbar ist, muß es eine nicht leere Schaltfolge w mit $m \xrightarrow{w} m$ geben. Diese Schaltfolge könnte unendlich oft wiederholt werden. In einem terminierenden Netz sind jedoch keine unendlichen Schaltfolgen möglich. □

Satz 4.2.3.13. $\boxed{\text{T} \Rightarrow \text{B}}$
Wenn ein Netz terminierend ist, dann ist es beschränkt.

Beweis. Ein terminierendes Netz hat nach Lemma 4.5 nur endlich viele endliche Schaltfolgen. Daher kann auf keine Stelle eine beliebige Anzahl von Marken gebracht werden. Eine obere Schranke für die Anzahl von Marken auf einer Stelle, die für alle Stellen in allen Markierungen gilt, läßt sich mit $\max\{|w||w \in F_N\} + \max\{m_0(s)|s \in S\}$ angeben. Daher ist ein terminierendes Netz beschränkt.

□

Satz 4.2.3.14. $\boxed{\text{TM} \Rightarrow \text{PE}}$
Wenn ein Netz eine tote Anfangsmarkierung hat, dann ist es persistent.

Beweis. In einem Netz mit toter Anfangsmarkierung ist nie eine Transition aktiviert. Es gibt daher keine aktivierten Transitionen, die vor ihrem Schalten wieder deaktiviert werden könnten, was für ein nicht persistentes Netz notwendig wäre. □

Satz 4.2.3.15. $\boxed{\text{TM} \Rightarrow \text{T}}$
Wenn ein Netz eine tote Anfangsmarkierung hat, dann ist es terminierend.

Beweis. In einem Netz mit toter Anfangsmarkierung sind keine Schaltfolgen möglich, also auch keine unendlichen Schaltfolgen. □

Satz 4.2.3.16. $\boxed{\text{TM} \Rightarrow \text{R}}$
Wenn ein Netz eine tote Anfangsmarkierung hat, dann ist es reversibel.

Beweis. In einem Netz mit toter Anfangsmarkierung ist die Anfangsmarkierung die einzig mögliche Markierung und kann durch die leere Schaltfolge von sich selbst ausgehend erreicht werden. □

Satz 4.2.3.17. $\boxed{\text{TM, 1L} \Rightarrow \perp}$
Es gibt kein Netz, das eine tote Anfangsmarkierung hat und 1-lebendig ist.

Beweis. In einem Netz mit toter Anfangsmarkierung kann keine Transition schalten. □

Satz 4.2.3.18. $\boxed{\text{PE, 4L} \Rightarrow \text{WF}}$ (aus [Car87, Seite 88])
Wenn ein Netz persistent und 4-lebendig ist, dann ist es schwach fair.

Satz 4.2.3.19. $\boxed{\text{KRP} \Rightarrow \text{NARP}}$
Wenn ein Netz keine reproduzierbare Markierung hat, dann hat es nicht reproduzierbare Markierungen.

Beweis. Diese Implikation folgt direkt den aus Definitionen 2.30 und 2.31. □

Satz 4.2.3.20. $\boxed{\text{V} \Rightarrow \text{NARP}}$
Wenn ein Netz eine Verklemmung hat, dann hat es nicht reproduzierbare Markierungen.

Beweis. In einem Netz mit einer Verklemmung existiert eine Markierung, in der keine Transition mehr schalten kann. Diese Markierung ist also nicht reproduzierbar. □

Satz 4.2.3.21. $\boxed{\text{B, KRP} \Rightarrow \text{T}}$
Wenn ein Netz beschränkt ist und keine reproduzierbare Markierung hat, dann ist es terminierend.

Beweis. In einem Netz, das keine reproduzierbare Markierung hat, darf jede Markierung nur einmal erreicht werden. Wird eine unendliche Schaltfolge ausgeführt, steigt daher die Anzahl der Marken im Netz unbegrenzt. Es gibt also mindestens eine Stelle, deren Markenzahl nicht nach oben beschränkt ist. So ein Netz ist damit nicht beschränkt. Daher muß ein beschränktes Netz, daß keine reproduzierbare Markierung hat, terminierend sein. □

Satz 4.2.3.22. $\boxed{\text{PE, V} \Rightarrow \text{T}}$
Wenn ein Netz persistent ist und eine Verklemmung hat, dann ist es terminierend.

Beweis. Ein persistentes Netz $N = (S, T, F, m_0)$ mit einer Verklemmung hat eine Markierung $m \in R_N$ in der keine Transition aktiviert ist. Angenommen N ist nicht terminierend, d.h. es gibt eine unendliche Schaltfolge $w \in F_N^\omega$. Aufgrund von Lemma 4.4, ist dann in der Markierung m eine unendliche Schaltfolge aktiviert, was im Widerspruch zur obigen Aussage über m steht. Also muß ein persistentes Netz mit Verklemmung terminierend sein. □

Satz 4.2.3.23. $\boxed{\text{R, NARP} \Rightarrow \text{TM}}$
Wenn ein Netz reversibel ist und nicht reproduzierbare Markierungen hat, dann hat es eine tote Anfangsmarkierung.

Beweis. Ein Netz mit nicht reproduzierbaren Markierungen hat eine Markierung m, die nur einmal erreicht werden kann, d.h. gilt $m \xrightarrow{w} m$ nur für die leere Schaltfolge $w = \lambda$. Ist das Netz auch noch reversibel, müßte m jedoch von jeder anderen Markierung erreichbar sein. Da dies nicht möglich ist, kann es nur die Markierung m geben. Das Netz hat dann eine tote Anfangsmarkierung. □

4.3 Instanzen der atomaren Netzklassen

Jedes in den folgenden Unterabschnitten dargestellte Netz, ist eine Instanz für eine atomare Netzklasse. Die letzten beiden Ziffern in einer Abbildungsbezeichnung, bilden die Nummer der atomaren Netzklasse. Diese Nummern stammen aus der Auflistung der Netzklassen im Anhang A. In der Bildunterschrift zu einer Instanz sind jeweils alle Netzeigenschaften der entsprechenden Untersuchungsklasse aufgeführt. Befindet sich das Negationssymbol $\neg$ vor der Abkürzung einer Netzeigenschaft, wird die Netzeigenschaft von der Instanz nicht erfüllt. Anderenfalls wird die Netzeigenschaft erfüllt.

Für jede Instanz wird kurz begründet, warum bestimmte Netzeigenschaften von ihr erfüllt oder nicht erfüllt werden. Wenn eine Netzeigenschaft trivialerweise von einer Instanz erfüllt oder nicht erfüllt wird, dann wird keine Begründung angegeben. Vor jeder Begründung stehen die Abkürzungen der Netzeigenschaften, auf die sich die Begründung bezieht. Eine Netzeigenschaft, die unmittelbar aus einer anderen folgt, wird nicht extra angegeben. Ist

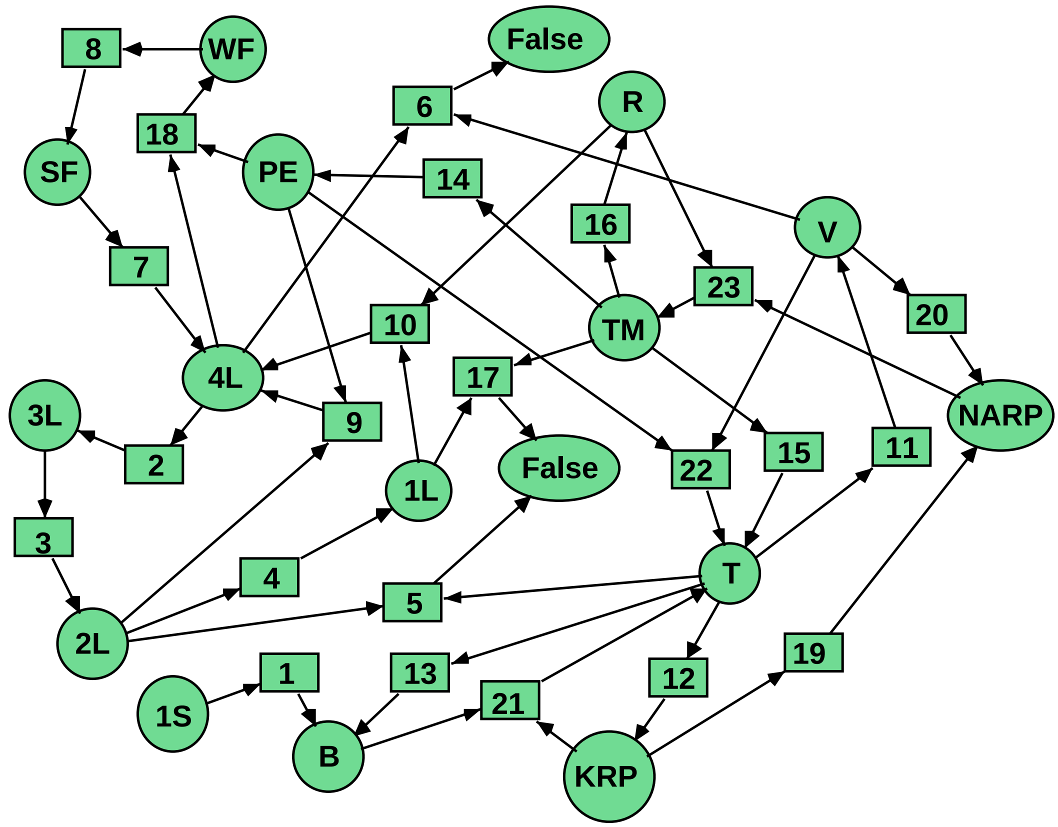


Abbildung 4.4: Die Implikationen für die Untersuchungsklasse $\mathcal{E}_D$ als Faktennetz.

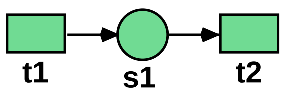
eine Instanz einer schon abgehandelten Instanz ähnlich, werden nur die Netzeigenschaften betrachtet, in der sich die Instanzen unterscheiden.

4.3.1 Instanzen zur Untersuchung der strukturellen Netzeigenschaften

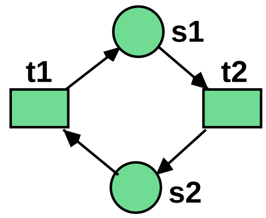
4.3-S00 $\boxed{\neg\text{SN}}$: t_1 hat keine Eingangsstellen. $\boxed{\text{TN}}$: s_1 hat genau eine Eingangs- und eine Ausgangstransition. $\boxed{\text{VSN}}$: Alle Transitionen haben höchstens eine Eingangs- und eine Ausgangsstelle.

4.3-S01 $\boxed{\neg\text{AZ}}$: t_1, s_1, t_2, s_2 bilden einen Zyklus. $\boxed{\text{SN}}$: Jede Transition hat genau eine Eingangs- und eine Ausgangsstelle. $\boxed{\text{TN}}$: Jede Stelle hat genau eine Eingangs- und eine Ausgangstransition. $\boxed{\text{SE}}$, $\boxed{\text{TE}}$: Keine zwei Stellen bzw. Transitionen haben dieselben Eingangs- und Ausgangstransitionen bzw. dieselben Eingangs- und Ausgangsstellen.

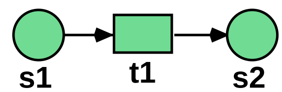
4.3-S02 $\boxed{\neg\text{TN}}$: s_1 hat keine Eingangstransitionen. $\boxed{\text{SN}}$: t_1 hat genau eine Eingangs- und Ausgangsstelle. $\boxed{\text{VTN}}$: Alle Stellen haben höchstens eine Eingangs- und eine Ausgangstransition.



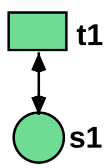
4.3-S00: VTN SE TN VSN AC AZ EFC ¬SN FC TE NF



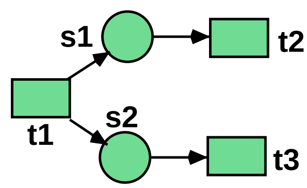
4.3-S01: VTN SE TN VSN AC ¬AZ EFC SN FC TE NF



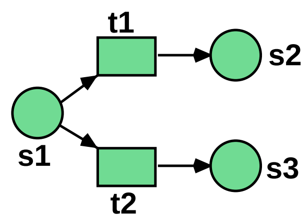
4.3-S02: VTN SE ¬TN VSN AC AZ EFC SN FC TE NF



4.3-S03: VTN SE TN VSN AC ¬AZ EFC SN FC TE ¬NF



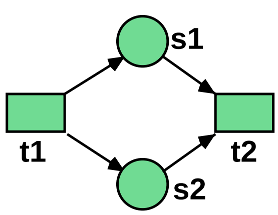
4.3-S05: VTN SE TN ¬VSN AC AZ EFC ¬SN FC TE NF



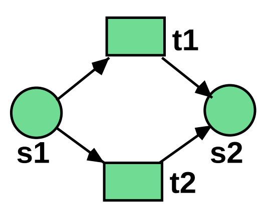
4.3-S08: ¬VTN SE ¬TN VSN AC AZ EFC SN FC TE NF

4.3-S03 TN: t_1 ist für s_1 Eingangs- und Ausgangstransition. SN: s_1 ist für t_1 Eingangs- und Ausgangsstelle. ¬ NF: s_1 ist Nebenbedingung von t_1.

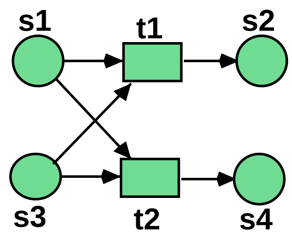
4.3-S05 ¬VSN: t_1 hat mehr als eine Ausgangsstelle. TN: Jede Stelle hat genau eine Eingangs- und eine Ausgangstransition.



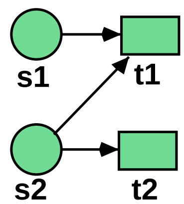
4.3-S14: VTN ¬SE TN ¬VSN AC AZ EFC ¬SN FC TE NF



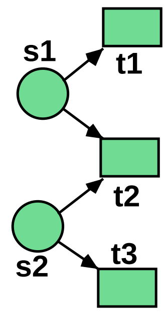
4.3-S15: ¬VTN SE ¬TN VSN AC AZ EFC SN FC ¬TE NF



4.3-S35: ¬VTN SE ¬TN ¬VSN AC AZ EFC ¬SN ¬FC TE NF



4.3-S41: $\boxed{\neg\mathrm{VTN}}$ $\boxed{\mathrm{SE}}$ $\boxed{\neg\mathrm{TN}}$ $\boxed{\neg\mathrm{VSN}}$ $\boxed{\mathrm{AC}}$ $\boxed{\mathrm{AZ}}$ $\boxed{\neg\mathrm{EFC}}$ $\boxed{\neg\mathrm{SN}}$ $\boxed{\neg\mathrm{FC}}$ $\boxed{\mathrm{TE}}$ $\boxed{\mathrm{NF}}$



4.3-S53: $\boxed{\neg\mathrm{VTN}}$ $\boxed{\mathrm{SE}}$ $\boxed{\neg\mathrm{TN}}$ $\boxed{\neg\mathrm{VSN}}$ $\boxed{\neg\mathrm{AC}}$ $\boxed{\mathrm{AZ}}$ $\boxed{\neg\mathrm{EFC}}$ $\boxed{\neg\mathrm{SN}}$ $\boxed{\neg\mathrm{FC}}$ $\boxed{\mathrm{TE}}$ $\boxed{\mathrm{NF}}$

4.3-S08 $\boxed{\neg\mathrm{VTN}}$: s_1 hat mehr als eine Ausgangstransition. $\boxed{\mathrm{SN}}$: Jede Transition hat genau eine Eingangs- und eine Ausgangsstelle.

4.3-S14 $\boxed{\mathrm{TN}}$: Jede Stelle hat genau eine Eingangs- und eine Ausgangstransition. $\boxed{\neg\mathrm{VSN}}$: t_1 hat mehr als eine Ausgangsstelle. $\boxed{\neg\mathrm{SE}}$: s_1 und s_2 haben dieselben Eingangs- und Ausgangstransitionen.

4.3-S15 $\boxed{\mathrm{SN}}$: Jede Transition hat genau eine Eingangs- und eine Ausgangsstelle. $\boxed{\neg\mathrm{VTN}}$: s_1 hat mehr als eine Ausgangstransition. $\boxed{\neg\mathrm{TE}}$: t_1 und t_2 haben dieselben Eingangs- und Ausgangsstellen.

4.3-S35 Die Netzeigenschaften von diesem Netz wurden schon in Abschnitt 2.2.2 besprochen.

4.3-S41 $\boxed{\neg\mathrm{VTN}}$: s_2 hat mehr als eine Ausgangstransition. $\boxed{\neg\mathrm{VSN}}$: t_1 hat mehr als eine Eingangsstelle. $\boxed{\neg\mathrm{EFC}}$: s_1 und s_2 haben gemeinsame Ausgangstransitionen, wobei s_2 eine Ausgangstransition hat, die s_1 nicht hat. $\boxed{\mathrm{AC}}$: Es gilt $s_1^\bullet \subset s_2^\bullet$.

4.3-S53 $\boxed{\neg\mathrm{VTN}}$: s_2 hat mehr als eine Ausgangstransition. $\boxed{\neg\mathrm{VSN}}$: t_2 hat mehr als eine Eingangsstelle. $\boxed{\neg\mathrm{AC}}$: Es gilt $\neg(s_1^\bullet \subset s_2^\bullet)$ und $\neg(s_2^\bullet \subset s_1^\bullet)$.

4.3.2 Instanzen zur Untersuchung der dynamischen Netzeigenschaften

4.3-D00 $\boxed{\mathrm{1S}}$: Keine Transition ist vorwärtsverzweigt, d.h. keine Marken werden erzeugt und es gibt nur eine Marke. $\boxed{\mathrm{PE}}$: Keine Stelle ist vorwärtsverzweigt, d.h. jede aktivierte Transition kann vor ihrem schalten nicht mehr deaktiviert werden. $\boxed{\mathrm{4L}}$, $\boxed{\mathrm{WF}}$, $\boxed{\neg\ \mathrm{T}}$: Es gibt genau eine unendliche Schaltfolge, in der alle Transitionen unendlich oft vorkommen.

Jede endliche Schaltfolge ist ein Teilstück dieser unendlichen Schaltfolge. $\boxed{\text{R}}$: Es gibt genau zwei Markierungen. Jede läßt sich von der anderen aus erreichen.

4.3-D01 Das gleiche Netz, wie in Abbildung 2.1. $\boxed{\text{B}}$: Bei allen vorwärtverzweigten Transitionen ist die Anzahl der Eingangsstellen gleich der Anzahl der Ausgangsstellen. $\boxed{\text{PE}}$, $\boxed{\text{4L}}$, $\boxed{\text{WF}}$, $\boxed{\neg\text{T}}$: Es gibt genau eine unendliche Schaltfolge $v = t_1(t_2, t_1, t_3, t_4)^\omega$, in der alle Transitionen unendlich oft vorkommen. Jede endliche Schalfolge ist ein Teilstück von v. $\boxed{\neg\text{R}}$, $\boxed{\text{NARP}}$: Die Anfangsmarkierung ist nach dem Schalten von t_1 nicht mehr erreichbar. $\boxed{\neg\text{KRP}}$: Alle anderen Markierungen werden beim Schalten von $(t_2, t_1, t_3, t_4)^\omega$ immer wieder erreicht.

4.3-D03 Wie Netz 4.3-D01, außer das s_2 in der Anfangsmarkierung eine Marke trägt. $\boxed{\neg\text{1S}}$: Es können zwei Marken auf eine Stelle gelangen.

4.3-D04 Unterscheidet sich von Netz 4.3-D01 in der Anfangsmarkierung. $\boxed{\neg\text{1S}}$: s_1 trägt in der Anfangsmarkierung zwei Marken.

4.3-D05 $\boxed{\text{TM}}$, $\boxed{\text{V}}$: Keine Transition kann schalten. $\boxed{\text{R}}$, $\boxed{\text{KRP}}$: Nur mit der leeren Schaltfolge kann die einzige Markierung, die Anfangsmarkierung, reproduziert werden.

4.3-D06 $\boxed{\text{B}}$: t_1 erzeugt 3 Marken, t_2, t_3 und t_4 haben jeweils die gleiche Anzahl an Eingangs- und Ausgangsstellen, t_5 vernichtet 3 Marken. t_1 und t_5 können in einer Schaltfolge nie mehr als einmal schalten ohne das zuvor die jeweils andere Transition t_5 bzw. t_1 schaltet. $\boxed{\neg\text{PE}}$: t_2 und t_4 stehen in Konflikt. $\boxed{\text{4L}}$, $\boxed{\text{R}}$, $\boxed{\neg\text{NARP}}$, $\boxed{\neg\text{T}}$: In der Markierungsfolge zu jeder unendlichen Schaltfolge kommt die Anfangsmarkierung unendlich oft vor. $\boxed{\text{WF}}$: Es gibt genau zwei unendliche Schaltfolgen $w_1 = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)^\omega$ und $w_2 = (t_1, t_4, t_3, t_2, t_5)^\omega$, in denen jede Transition unendlich oft vorkommt. $\boxed{\text{1S}}$:
Markierungsfolge für w_1: $(1{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0) \xrightarrow{t_1} (0{,}1{,}1{,}1{,}1{,}0{,}0{,}0{,}0) \xrightarrow{t_2} (0{,}0{,}1{,}0{,}1{,}1{,}0{,}0{,}1) \xrightarrow{t_3} (0{,}0{,}0{,}1{,}1{,}0{,}1{,}0{,}1) \xrightarrow{t_4} (0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}1{,}1{,}1{,}1) \xrightarrow{t_5} (1{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0)\ldots$
Markierungsfolge für w_2: $(1{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0) \xrightarrow{t_1} (0{,}1{,}1{,}1{,}1{,}0{,}0{,}0{,}0) \xrightarrow{t_4} (0{,}1{,}1{,}0{,}0{,}1{,}0{,}1{,}0) \xrightarrow{t_3} (0{,}1{,}0{,}1{,}0{,}0{,}1{,}1{,}0) \xrightarrow{t_2} (0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}1{,}1{,}1{,}1) \xrightarrow{t_5} (1{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0{,}0)\ldots$

4.3-D07 Unterscheidet sich von Netz 4.3-D06 durch die zusätzliche Stelle s_{10} und zusätzliche Transition t_6. $\boxed{\neg\text{R}}$, $\boxed{\text{NARP}}$: Die Anfangsmarkierung kann nach dem Schalten von t_6 nicht mehr erreicht werden.

4.3-D08 Unterscheidet sich von Netz 4.3-D00 durch die zusätzliche Stelle s_3. $\boxed{\neg\text{B}}$: Dieser Stelle können nur Marken hinzugefügt, aber nicht wieder entfernt werden. $\boxed{\text{KRP}}$, $\boxed{\neg\text{R}}$: Bei jedem Schalten von t_2, wird die Anzahl der Marken in s_3 um Eins erhöht und damit eine neue Markierung erzeugt. Jede Markierung kann nur einmal erreicht werden.

4.3-D10 $\boxed{\text{V}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{T}}$, $\boxed{\text{1L}}$: Die einzige Transition t_1 kann nur einmal schalten.

4.3-D11 Unterscheidet sich von Netz 4.3-D05 in der Anfangsmarkierung. $\boxed{\neg\text{1S}}$: s_1 trägt in der Anfangsmarkierung zwei Marken.

4.3-D12 $\boxed{\text{B}}$: Keine Transition ist vorwärtsverzweigt, d.h. keine Marken werden erzeugt. $\boxed{\neg\text{PE}}$: s_1 ist vorwärtsverzweigt. Transition t_2 bzw. t_3 wird wieder deaktiviert, wenn t_3 bzw. t_2 schaltet. $\boxed{\text{4L}}$: Jede Transition kann nach jeder beliebigen Schaltfolge wieder zum Schalten gebracht werden. $\boxed{\text{R}}$: Es gibt genau zwei Markierungen. Jede läßt sich von der anderen aus erreichen. $\boxed{\text{SF}}$: In jeder fairen Schaltfolge kommen alle Transitionen unendlich oft vor. $\boxed{\neg\text{WF}}$: In der verschleppungsfreien Schaltfolge $(t_2, t_1)^\omega$ kommt die Transition t_3 überhaupt nicht vor.

4.3-D14 Unterscheidet sich von Netz 4.3-D01 durch einen zusätzlichen Zyklus s_2, t_5, s_6, t_6. $\boxed{\neg\text{PE}}$: s_2 ist vorwärtsverzweigt. Transition t_5 wird wieder deaktiviert, wenn t_2 schaltet. $\boxed{\neg\text{WF}}$: In der verschleppungsfreien Schaltfolge $(t_2, t_3, t_1, t_4)^\omega$ kommen die Transitionen t_5 und t_6 überhaupt nicht vor.

4.3-D17 $\boxed{\neg\text{B}}$, $\boxed{\neg\text{NARP}}$: Durch Schalten von $(t_2, t_1)^*$ können beliebig viele Marken auf s_3 gelangen. Diese Marken werden durch Schalten von $(t_3, t_4)^*$ wieder abgebaut. Jede Markierung ist somit reproduzierbar. $\boxed{\text{PE}}$: Keine Stelle ist vorwärtsverzweigt, d.h. jede aktivierte Transition kann vor ihrem Schalten nicht mehr deaktiviert werden. $\boxed{\text{4L}}$: Jede Transition kann nach jeder beliebigen Schaltfolge wieder zum Schalten gebracht werden. $\boxed{\text{WF}}$: Die Schaltfolge t_3, t_4 kann allein nicht unendlich oft wiederholt werden, da die Anzahl der Marken in s_3 endlich ist. Für eine unendliche Schaltfolge müssen also auch die Transitionen t_1 und t_2 unendlich oft schalten. Die unendliche Schaltfolge $(t_2, t_1)^\omega$ ist nicht verschleppungsfrei, da t_3 bzw. t_4 (je nachdem, ob eine Marke in s_5 oder s_4 liegt) permanent aktiviert ist. In jeder verschleppungsfreien Schaltfolge kommen also alle Transitionen unendlich oft vor.

4.3-D19 $\boxed{\neg\text{B}}$: Der Stelle s_2 können nur Marken hinzugefügt, aber nicht wieder entfernt werden. $\boxed{\text{PE}}$: t_3 und t_4 stehen in Konflikt. $\boxed{\text{WF}}$: Es gibt genau zwei unendliche Schaltfolgen $w_1 = (t_1, t_3, t_2, t_4, t_5)^\omega$ und $w_2 = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)^\omega$, in denen jede Transition unendlich oft vorkommt. $\boxed{\text{4L}}$, $\boxed{\neg\text{T}}$: In der Markierungsfolge zu w_1 und w_2 kommt die Anfangsmarkierung unendlich oft vor. $\boxed{\neg\text{R}}$, $\boxed{\text{KRP}}$: Durch die Stelle s_2, aus der keine Marken abgezogen werden können, kann jede Markierung nur einmal erreicht werden.

4.3-D21 Unterscheidet sich von Netz 4.3-D10 in der Anfangsmarkierung. $\boxed{\neg\text{1S}}$: s_1 trägt in der Anfangsmarkierung zwei Marken.

4.3-D26 $\boxed{\text{V}}$, $\boxed{\text{T}}$: Es gibt keine unendlichen Schaltfolgen. $\boxed{\text{1L}}$: In der Schaltfolge t_1, t_3, t_2 kommt jede Transition einmal vor.

4.3-D27 $\boxed{\mathrm{V}}$: Wenn s_2 und s_4 markiert sind, kann keine Transition mehr schalten. $\boxed{\neg\mathrm{T}}$: Die Schaltfolgen $(t_1, t_2)^\omega$ und $(t_4, t_3)^\omega$ sind unendliche Schaltfolgen. $\boxed{\mathrm{B}}$: Durch das Schalten der vorwärtsverzweigten Transitionen t_2 oder t_3 erhöht sich die Markenzahl im Netz nicht, da s_1 bzw. s_3 sowohl Eingangs- als auch Ausgangsstelle für t_3 bzw. t_2 ist. $\boxed{\neg\mathrm{PE}}$: s_1 ist vorwärtsverzweigt. Falls in s_4 eine Marke liegt, wird die Transition t_3 wieder deaktiviert, wenn t_1 schaltet. $\boxed{\neg\mathrm{KRP}}$: Z.B. ist die Anfangsmarkierung reproduzierbar. $\boxed{\mathrm{3L}}$: In der unendlichen Schaltfolge $(t_1, t_2, t_4, t_3)^\omega$ kommen alle Transitionen unendlich oft vor.

4.3-D28 $\boxed{\mathrm{B}}$: Bei allen vorwärtverzweigten Transitionen ist die Anzahl der Eingangsstellen gleich der Anzahl der Ausgangsstellen. $\boxed{\neg\mathrm{PE}}$: t_2 steht in Konflikt mit t_1 und t_3. $\boxed{\mathrm{4L}}$: Jede Transition kann nach jeder beliebigen Schaltfolge wieder zum Schalten gebracht werden. $\boxed{\neg\mathrm{SF}}$: In der fairen Schaltfolge $t_1, t_3, (t_4, t_1, t_5, t_3)^\omega$ kommt die Transition t_2 nicht vor. $\boxed{\mathrm{R}}$: Die Anfangsmarkierung läßt sich von jeder Markierung aus erreichen.

4.3-D29 Unterscheidet sich von Netz 4.3-D01 durch die zusätzlichen Transitionen t_5, t_6, t_7 und die Stellen s_6 und s_7. $\boxed{\neg\mathrm{PE}}$: t_4 und t_5 stehen in Konflikt. $\boxed{\neg\mathrm{SF}}$: In der fairen Schaltfolge $t_1, t_6, (t_2, t_1, t_3, t_4, t_7, t_6)^\omega$ kommt die Transition t_5 nicht vor.

4.3-D31 Die Netzeigenschaften von diesem Netz wurden schon in Abschnitt 2.2.3 besprochen.

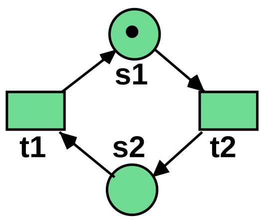
4.3-D38 $\boxed{\mathrm{B}}$: Bei allen vorwärtverzweigten Transitionen ist die Anzahl der Eingangsstellen gleich der Anzahl der Ausgangsstellen. $\boxed{\neg\mathrm{PE}}$: t_9 steht in Konflikt mit t_1 und t_4. $\boxed{\mathrm{V}}$: Wenn s_5 und s_6 markiert sind, kann keine Transition mehr schalten. $\boxed{\neg\mathrm{R}}$, $\boxed{\mathrm{NARP}}$: Die Anfangsmarkierung ist nach dem Schalten von t_1 oder t_4 nicht mehr erreichbar. $\boxed{\neg\mathrm{KRP}}$: Alle anderen Markierungen sind reproduzierbar. $\boxed{\mathrm{2L}}$: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ kommen in der Schaltfolge $(t_9)^n, t_1, t_4, (t_5, t_6, t_8, t_7, t_2, t_1, t_3, t_4)^n$ alle Transitionen mindestens n-mal vor. $\boxed{\neg\mathrm{3L}}$: Sobald t_1 oder t_4 geschaltet haben, kann t_9 nicht mehr schalten. $\boxed{\neg\mathrm{T}}$: Es gibt z.B. die unendliche Schaltfolge $(t_9)^\omega$.

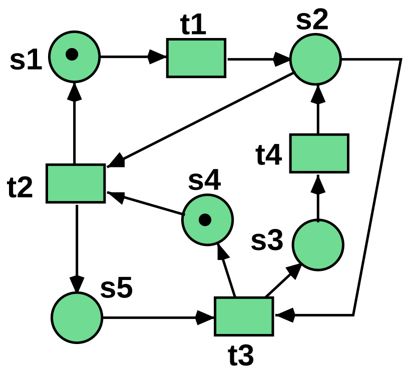
4.3-D39 $\boxed{\mathrm{B}}$: Bei allen vorwärtverzweigten Transitionen ist die Anzahl der Eingangsstellen gleich der Anzahl der Ausgangsstellen. Es werden also keine Marken erzeugt. $\boxed{\neg\mathrm{PE}}$: t_3, t_4 und t_5 stehen in Konflikt. $\boxed{\mathrm{V}}$: Wenn t_4 oder t_5 zweimal hintereinander geschaltet werden, sodaß auf s_5 bzw. s_6 jeweils zwei Marken liegen, dann kann keine Transition mehr schalten. $\boxed{\mathrm{3L}}$: In der unendlichen Schaltfolge $t_3, t_1, (t_4, t_5, t_8, t_6, t_7, t_3, t_2, t_1)^\omega$ kommen alle Transitionen unendlich oft vor. $\boxed{\neg\mathrm{R}}$, $\boxed{\mathrm{NARP}}$: Die Anfangsmarkierung kann nicht von anderen Markierungen aus erreicht werden und ist nicht reproduzierbar. $\boxed{\neg\mathrm{KRP}}$: Alle anderen Markierungen sind reproduzierbar.

4.3-D47 $\boxed{\neg\mathrm{B}}$: Der Stelle s_2 können nur Marken hinzugefügt, aber nicht wieder entfernt werden. $\boxed{\neg\mathrm{PE}}$: t_1 und t_2 stehen in Konflikt. $\boxed{\mathrm{V}}$: Wenn t_1 oder t_2 zweimal hintereinander geschaltet werden, sodaß auf s_3 bzw. s_4 jeweils zwei Marken liegen, dann kann keine Transition mehr schalten. $\boxed{\text{KRP}}$, $\boxed{\neg\text{R}}$: Bei jedem Schalten von t_1 oder t_2 wird die Anzahl der Marken in s_2 um Eins erhöht und damit eine neue Markierung erzeugt. Jede Markierung kann nur einmal erreicht werden. $\boxed{\text{3L}}$: In der unendlichen Schaltfolge $(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)^\omega$ kommen alle Transitionen unendlich oft vor.

4.3-D48 Unterscheidet sich von Netz 4.3-D28 durch eine zusätzliche Kante von t_2 nach s_3. $\boxed{\neg\text{B}}$: Den Stellen t_3 und t_4 können nur Marken hinzugefügt, aber nicht entzogen werden. $\boxed{\text{KRP}}$, $\boxed{\neg\text{R}}$: Bei jedem Schalten von t_1, t_2 oder t_3 wird die Anzahl der Marken in s_3 oder s_4 um Eins erhöht und damit eine neue Markierung erzeugt. Jede Markierung kann nur einmal erreicht werden.

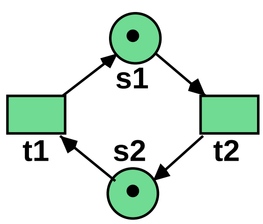
4.3-D58 $\boxed{\neg\text{B}}$: Auf s_1 können beliebig viele Marken gebracht werden. $\boxed{\neg\text{PE}}$: s_2 ist vorwärtsverzweigt. Falls in s_5 eine Marke liegt, wird die Transition t_5 wieder deaktiviert, wenn t_3 schaltet. $\boxed{\neg\text{3L}}$: t_2 ist aktiviert, wenn s_3 und s_5 markiert sind und sich auf s_1 $n \geq 1$ Marken befinden. Die Marken auf s_3 und s_5 können nicht mehr nach s_2 und s_4 gebracht werden, da t_4 und t_5 nicht mehr aktiviert werden können. Dadurch kann die Markenzahl auf s_1 durch Schalten von t_1 nicht mehr erhöht werden. t_2 kann also niemals unendlich oft schalten. $\boxed{\text{V}}$: Wenn s_3 und s_5 markiert sind und s_1 keine Marke mehr trägt, kann keine Transition mehr schalten. $\boxed{\text{2L}}$: In der Schaltfolge $(t_3, t_4, t_6, t_5)^n, (t_1)^n, t_3, t_6, (t_2)^n$ kommt jede Transition mindestens n-mal vor. $\boxed{\neg\text{T}}$: Die Schaltfolgen $(t_3, t_4)^\omega$ und $(t_6, t_5)^\omega$ sind unendliche Schaltfolgen. $\boxed{\text{KRP}}$, $\boxed{\neg\text{R}}$: Bei jedem Schalten von t_1, t_3 oder t_6 wird die Anzahl der Marken in s_1 oder s_6 um Eins erhöht und damit eine neue Markierung erzeugt. Bei der Reduzierung der Marken auf s_1 durch Schalten von t_2, ist die Anzahl der Marken in s_6 um mindestens Eins höher als sie es bei der Erhöhung der Anzahl der Marken auf s_1 durch Schalten von t_1 war, so daß jede Markierung nur einmal erreicht werden kann.

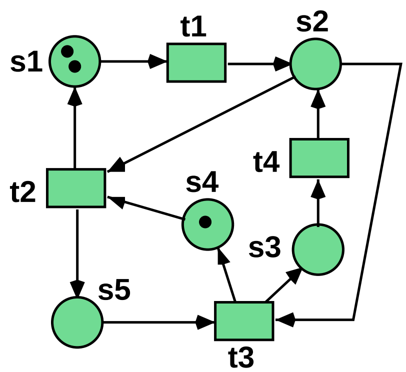




4.3-D00: B PE SF ¬V ¬KRP 2L ¬T 1S R ¬TM 4L 1L WF ¬NARP 3L

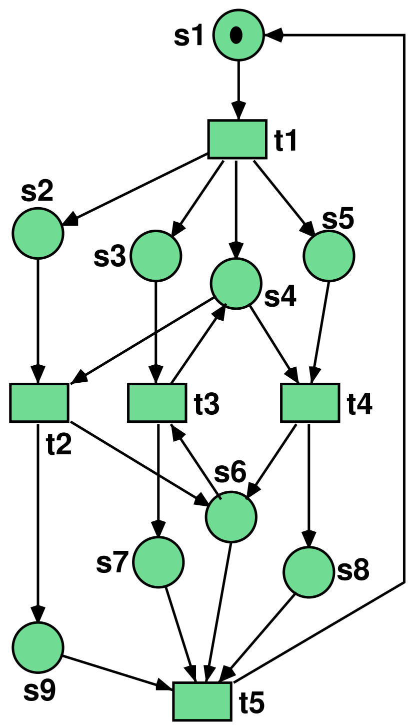
4.3-D01: B PE SF ¬V ¬KRP 2L ¬T 1S ¬R ¬TM 4L 1L WF NARP 3L



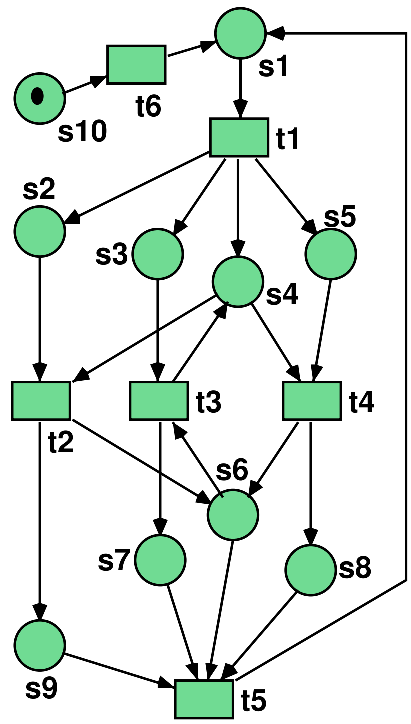


4.3-D03: B PE SF ¬V ¬KRP 2L ¬T ¬1S R ¬TM 4L 1L WF ¬NARP 3L

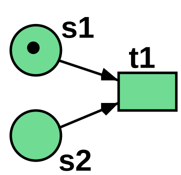
4.3-D04: B PE SF ¬V ¬KRP 2L ¬T ¬1S ¬R ¬TM 4L 1L WF NARP 3L



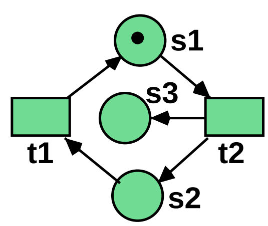
4.3-D06: B ¬PE SF ¬V ¬KRP 2L ¬T 1S R ¬TM 4L 1L WF ¬NARP 3L



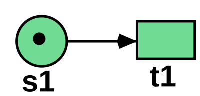
4.3-D07: B ¬PE SF ¬V ¬KRP 2L ¬T 1S ¬R ¬TM 4L 1L WF NARP 3L



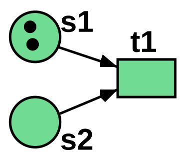
4.3-D05: B PE ¬SF V KRP ¬2L T 1S R TM ¬4L ¬1L ¬WF NARP ¬3L



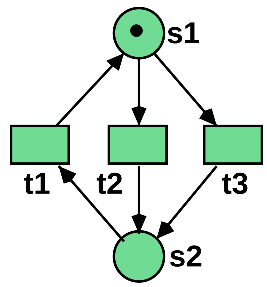
4.3-D08: ¬B PE SF ¬V KRP 2L ¬T ¬1S ¬R ¬TM 4L 1L WF NARP 3L



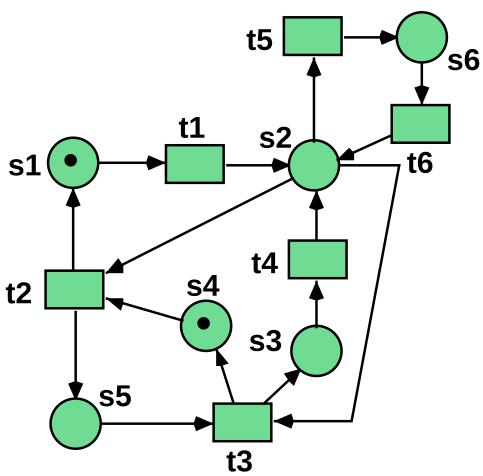
4.3-D10: B PE ¬SF V KRP ¬2L T 1S ¬R ¬TM ¬4L 1L ¬WF NARP ¬3L



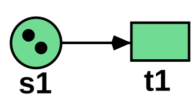
4.3-D11: B | PE | ¬SF | V | KRP | ¬2L | T | ¬1S | R | TM | ¬4L | ¬1L | ¬WF | NARP | ¬3L



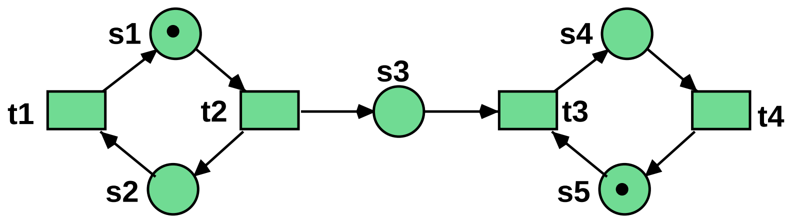
4.3-D12: B | ¬PE | SF | ¬V | ¬KRP | 2L | ¬T | 1S | R | ¬TM | 4L | 1L | ¬WF | ¬NARP | 3L



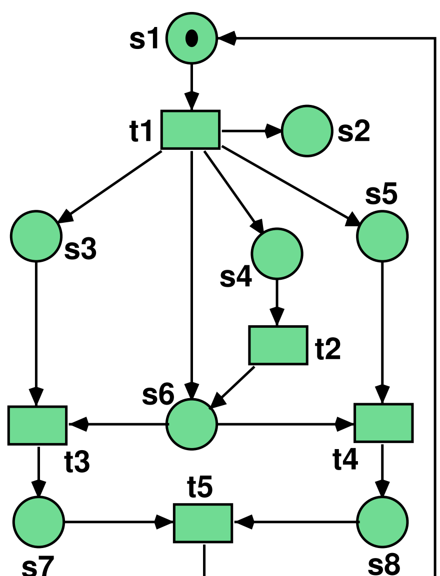
4.3-D14: B | ¬PE | SF | ¬V | ¬KRP | 2L | ¬T | 1S | ¬R | ¬TM | 4L | 1L | ¬WF | NARP | 3L



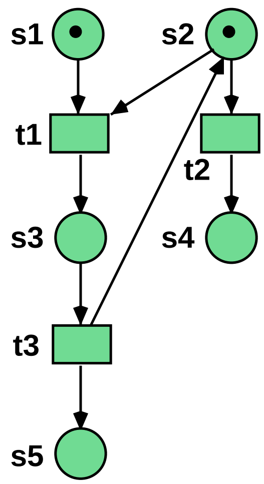
4.3-D21: B | PE | ¬SF | V | KRP | ¬2L | T | ¬1S | ¬R | ¬TM | ¬4L | 1L | ¬WF | NARP | ¬3L



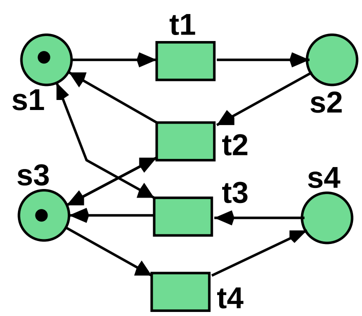
4.3-D17: ¬B PE SF ¬V ¬KRP 2L ¬T ¬1S R ¬TM 4L 1L WF ¬NARP 3L



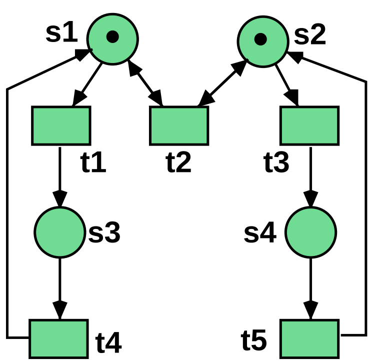
4.3-D19: ¬B ¬PE SF ¬V KRP 2L ¬T ¬1S ¬R ¬TM 4L 1L WF NARP 3L



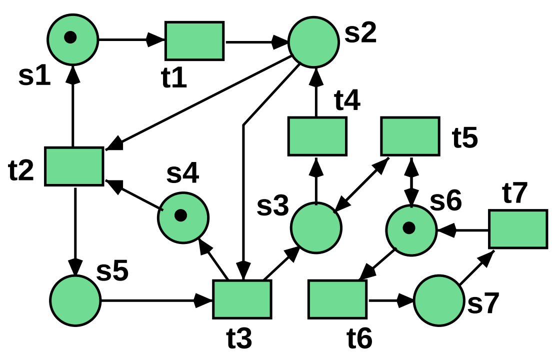
4.3-D26: B ¬PE ¬SF V KRP ¬2L T 1S ¬R ¬TM ¬4L 1L ¬WF NARP ¬3L



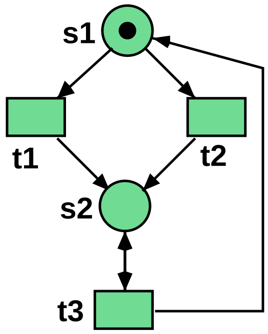
4.3-D27: B ¬PE ¬SF V ¬KRP 2L ¬T 1S ¬R ¬TM ¬4L 1L ¬WF NARP 3L



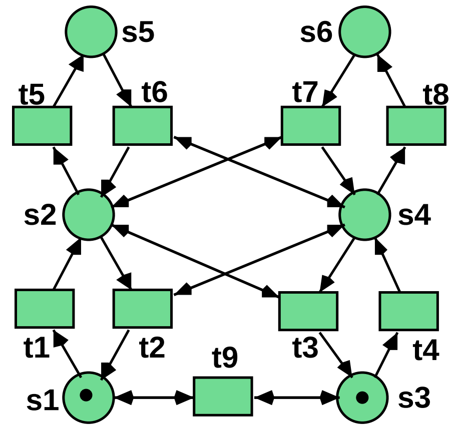
4.3-D28: B ¬PE ¬SF ¬V ¬KRP 2L ¬T 1S R ¬TM 4L 1L ¬WF ¬NARP 3L



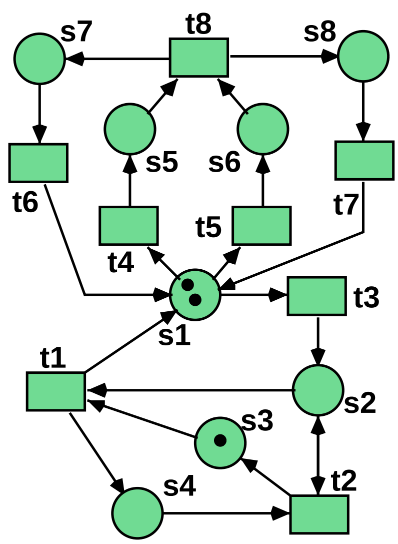
4.3-D29: B ¬PE ¬SF ¬V ¬KRP 2L ¬T 1S ¬R ¬TM 4L 1L ¬WF NARP 3L



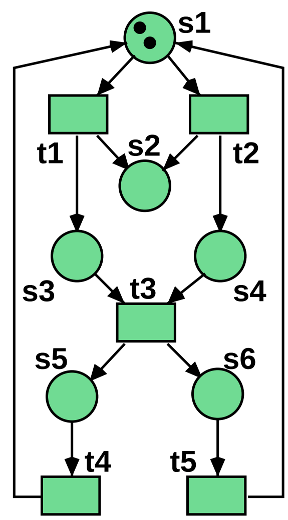
4.3-D31: ¬B ¬PE SF ¬V KRP 2L ¬T ¬1S ¬R ¬TM 4L 1L ¬WF NARP 3L



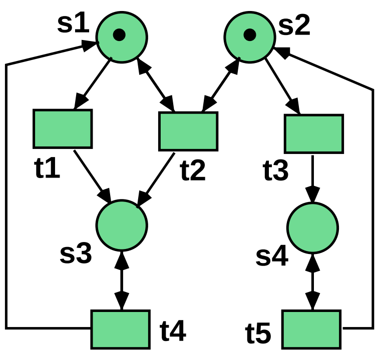
4.3-D38: B ¬PE ¬SF V ¬KRP 2L ¬T 1S ¬R ¬TM ¬4L 1L ¬WF NARP ¬3L



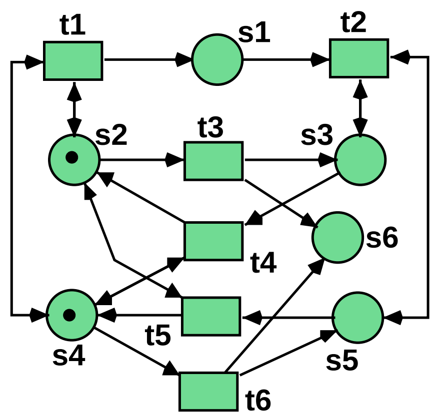
4.3-D39: B ¬PE ¬SF V ¬KRP 2L ¬T ¬1S ¬R ¬TM ¬4L 1L ¬WF NARP 3L



4.3-D47: ¬B ¬PE ¬SF V KRP 2L ¬T ¬1S ¬R ¬TM ¬4L 1L ¬WF NARP 3L



4.3-D48: ¬B ¬PE ¬SF ¬V KRP 2L ¬T ¬1S ¬R ¬TM 4L 1L ¬WF NARP 3L



4.3-D58: ¬B ¬PE ¬SF V KRP 2L ¬T ¬1S ¬R ¬TM ¬4L 1L ¬WF NARP ¬3L

5 Schlußbetrachtung

Es wurde ein Untersuchungsverfahren entwickelt, das es ermöglicht alle Implikationen zwischen den Netzeigenschaften in einer festgelegten Untersuchungsklasse zu finden. Das Verfahren konnte erfolgreich auf zwei konkrete Untersuchungsklassen angewendet werden. Dabei wurden Implikationen zwischen Netzeigenschaften ermittelt, die aus der Literatur noch nicht bekannt waren.

Für weitere Untersuchungen müßte bei Aufstellung der Untersuchungsklassen geklärt werden, welche Netzeigenschaften in welcher Zusammenstellung für theoretische Überlegungen und praktische Anwendungen relevant sein könnten. Interessant wäre auf jeden Fall die Untersuchung einer Klasse, die strukturelle und dynamische Netzeigenschaften gemeinsam enthält.

In Abschnitt 3.3 wurde $\mathcal{O}(2^m)$ als Komplexität für das Untersuchungsverfahren angegeben, wobei m die Anzahl der Netzeigenschaften in der Untersuchungsklasse ist. Diese hohe Komplexität kommt durch die Erzeugung der Potenzmenge der Untersuchungsklasse in Schritt 3.2-2 zustande. Es stellt sich also die Frage, wie groß eine Untersuchungsklasse werden kann, um noch nach praktikabler Zeit zu einem Ergebnis zu kommen. Die Rechenzeiten zur Erzeugung der Potenzmengen, für die in Kapitel 4 dargestellten Untersuchungsklassen $\mathcal{E}_S$ und $\mathcal{E}_D$ mit 11 und 15 Netzeigenschaften, liegen jeweils deutlich unter einer Sekunde[1]. Messungen haben ergeben, daß mit 24 Stunden Rechenzeit die Potenzmenge einer Untersuchungsklasse mit 33 Netzeigenschaften erzeugt werden kann, wobei die einzelnen Teilmengen in textueller Form, wie in Anhang A, ausgegeben werden. Unter Berücksichtigung von Implikationen steigt der Rechenaufwand einerseits, an anderer Stelle sinkt der Rechenaufwand, da durch die Implikationen erheblich weniger Teilmengen ausgegeben werden müssen. Diese Effekte ändern jedoch nichts an der Größenordnung von dem Meßergebnis.

Aus der alleinigen Betrachtung der Rechenzeit läßt sich nur bestimmen, ob die Untersuchung einer bestimmten Klasse überhaupt durchführbar ist, was davon abhängt, wieviel Rechenzeit investiert werden kann. Um Aussagen über den Gesamtaufwand des Verfahrens zu treffen, müssen auch die Schritte 3.2-4 und 3.2-5 des Untersuchungsverfahrens betrachtet werden. Diese enthalten keine automatisch durchführbaren Vorgänge. Das Konstruieren einer Instanz zu einer atomaren Netzklasse oder das Beweisen einer Implikation nimmt jeweils unvorhersagbar viel Zeit in Anspruch, wobei der Zeitaufwand auch von den Fähigkeiten und Erfahrungen des Anwenders abhängt. Zudem kann im voraus nichts über die Anzahl der Implikationen für eine Untersuchungsklasse gesagt werden, da die Implikationen das Ergebnis der Untersuchung darstellen. Die Anzahl der atomaren Netzklassen in einem Netzklassensystem hängt von der Anzahl der Implikationen und der Größe der Untersuchungsklasse ab.

[1] Alle Messungen wurden auf einer SunBlade 1000 mit 512 MB Hauptspeicher durchgeführt. Die verwendete Software ist in Java implementiert.

Ein Netzklassensystem für eine Untersuchungsklasse mit n Netzeigenschaften und ohne Implikationen hat genau $n+1$ atomare Netzklassen. Je höher die Anzahl der Implikationen ist, desto geringer ist die Anzahl der Netzklassen. Mit einer geringeren Anzahl von Netzklassen, müßte es folglich auch eine geringere Anzahl von atomaren Netzklassen geben. Hier kommt jedoch ein gegenteiliger Effekt viel stärker zum tragen. Mit steigender Anzahl der Implikationen, fallen möglicherweise auch viele, nach der Netzklassenordnung, große Netzklassen aus dem Netzklassensystem raus. Doch gerade mit wenigen großen Netzklassen können die meisten anderen Netzklassen erzeugt werden. So hat ein Netzklassensystem ohne Implikationen für eine Untersuchungsklasse mit 15 Netzeigenschaften 32768 Netzklassen, wovon 16 atomar sind. Das vollständige Netzklassensystem für die Untersuchungsklasse $\mathcal{E}_D$ hat mit 25 deutlich mehr atomare Netzklassen bei nur 114 Netzklassen insgesamt.

Auch ungeachtet der hohen Komplexität führt das Verfahren nicht immer zu einem Ergebnis. Findet sich in Schritt 3.2-4 keine Instanz zu einer atomaren Netzklasse, wird in Schritt 3.2-5 eine Implikation dem Netzklassensystem hinzugefügt, so daß die Netzklasse nicht mehr vorkommt. Kann für diese neue Implikation kein Beweis gefunden werden, dann kann nicht gesagt werde, ob tatsächlich kein Beweis existiert und damit die entsprechende Instanz doch existiert oder trotzdem ein Beweis existiert. Tritt dieser Fall ein, muß das Verfahren ergebnislos abgebrochen werden. Die erfolgreiche Anwendung des Verfahrens hängt also von den Fähigkeiten und Erfahrungen des Anwenders ab.

Mittels der Parallelkomposition ist es möglich die Anzahl der Netzklassen, für die Instanzen angegeben werden müssen, erheblich zu reduzieren. Für die Untersuchungsklasse $\mathcal{E}_D$ mußte nur für 25 von 114 Netzklassen eine Instanz ermittelt werden. Je geringer die Anzahl der Implikationen in einem Netzklassensystem, desto größer ist dieser Effekt. So sind bei einem Netzklassensystem, das zu einer Untersuchungsklasse mit 33 Netzeigenschaften gehört und keine Implikationen hat, für 34 von $8,59 \times 10^9$ Netzklassen Instanzen zu ermitteln, um nachzuweisen, daß das Netzklassensystem vollständig ist.

Nachteilig an der Parallelkomposition ist, daß die Netzeigenschaften nicht beliebig formuliert sein können, sondern so formuliert werden müssen, daß sie nach Definition 3.7 UND-Eigenschaften sind. Bei den meisten in dieser Arbeit betrachteten Netzeigenschaften war dies ohne weiteres möglich. Die Netzeigenschaften zur Fairneß (Definitionen 2.29, 2.28) ohne die Beschränkung auf 4-lebendige Netze, würden hingegen, in negierter und nicht negierter Form, keine UND-Eigenschaften sein. Es gibt auch Netzeigenschaften, die unter keinen Umständen UND-Eigenschaften sein können, wie es z.B. bei der Forderung nach „strengem Zusammenhang“ für den Netzgraphen der Fall ist.

A Netzklassen

Die beiden folgenden Abschnitte enthalten die Netzklassen der vollständigen Netzklassensysteme für die Untersuchungsklassen $\mathcal{E}_S$ bzw. $\mathcal{E}_D$. Eine Spalte steht jeweils für eine Netzeigenschaft. Im Spaltenkopf steht die Abkürzung der Netzeigenschaft, von oben nach unten zu lesen. Die Zeilen repräsentieren jeweils die Menge $\mathcal{E}'$ einer Netzklasse $(\mathcal{N}, \mathcal{E}_S, \mathcal{E}')$ bzw. $(\mathcal{N}, \mathcal{E}_D, \mathcal{E}')$, wobei eine Eins bedeutet, daß die der Spalte entsprechenden Netzeigenschaft in der Menge $\mathcal{E}'$ enthalten ist. Eine Null bedeutet, die Netzeigenschaft ist nicht in $\mathcal{E}'$ enthalten. Die Netzklassen sind nach der Netzklassenordnung (Definition 3.9) absteigend aufgelistet. Eine atomare Netzklasse ist mit einem Stern am Ende ihrer Zeile gekennzeichnet. Die Nummern am Anfang der Zeilen werden auch in den Bildunterschriften der Instanzen zu den atomaren Netzklassen in Abschnitt 4.3 verwendet.

A.1 Netzklassen zur Untersuchung der strukturellen Netzeigenschaften

```
      V  V  E
      TSTSAAFSFTN
      NENNCZCNCEF
      -----------
0000: 11111110111 *
0001: 11111011111 *
0002: 11011111111 *
0003: 11111011110 *
0004: 11111010111
0005: 11101110111 *
0006: 11011110111
0007: 11011011111
0008: 01011111111 *
0009: 11111010110
0010: 11101010111
0011: 11011011110
0012: 11011010111
0013: 11001110111
0014: 10101110111 *
0015: 01011111101 *
0016: 01011110111
0017: 01011011111
0018: 11101010110
0019: 11011010110
0020: 11001010111
0021: 10101010111
0022: 10001110111
0023: 01011110101
0024: 01011011110
0025: 01011011101
0026: 01011010111
0027: 01001110111
0028: 11001010110
0029: 10101010110
0030: 10001010111
0031: 01011011100
0032: 01011010110
0033: 01011010101
0034: 01001110101
0035: 01001110011 *
0036: 01001010111
0037: 00001110111
0038: 10001010110
0039: 01011010100
```

```
0040: 01001110001
0041: 01001100011 *
0042: 01001010110
0043: 01001010101
0044: 01001010011
0045: 00001110101
0046: 00001110011
0047: 00001010111
0048: 01001100001
0049: 01001010100
0050: 01001010010
0051: 01001010001
0052: 01001000011
0053: 01000100011 *
0054: 00001110001
0055: 00001100011
0056: 00001010110
0057: 00001010101
0058: 00001010011
0059: 01001010000
0060: 01001000010
0061: 01001000001
0062: 01000100001
0063: 01000000011
0064: 00001100001
0065: 00001010100
0066: 00001010010
0067: 00001010001
0068: 00001000011
0069: 00000100011
0070: 01001000000
0071: 01000000010
0072: 01000000001
0073: 00001010000
0074: 00001000010
0075: 00001000001
0076: 00000100001
0077: 00000000011
0078: 01000000000
0079: 00001000000
0080: 00000000010
0081: 00000000001
0082: 00000000000
```

A.2 Netzklassen zur Untersuchung der dynamischen Netzeigenschaften

```
                    N
           K        A
        PS R2 1 T41WR3
       BEFVPLTSRMLLFPL
       ---------------
00000: 111001011011101 *
00001: 111001010011111 *
00002: 111001010011101
00003: 111001001011101 *
00004: 111001000011111 *
00005: 110110111100010 *
00006: 101001011011101 *
00007: 101001010011111 *
00008: 011011000011111 *
00009: 111001000011101
00010: 110110110001010 *
00011: 110110101100010 *
00012: 101001011011001 *
00013: 101001010011101
00014: 101001010011011 *
00015: 101001001011101
00016: 101001000011111
00017: 011001001011101 *
00018: 011001000011111
00019: 001011000011111 *
00020: 110110110000010
00021: 110110100001010 *
00022: 101001010011001
00023: 101001001011001
00024: 101001000011101
00025: 101001000011011
00026: 100110110001010 *
00027: 100101010001011 *
00028: 100001011011001 *
00029: 100001010011011 *
00030: 011001000011101
00031: 001011000011011 *
00032: 001001001011101
00033: 001001000011111
00034: 110110100000010
00035: 101001000011001
00036: 100110110000010
00037: 100110100001010
00038: 100101010001010 *
00039: 100101000001011 *
00040: 100001010011001
00041: 100001010001011
00042: 100001001011001
00043: 100001000011011
00044: 001001001011001
00045: 001001000011101
00046: 001001000011011
00047: 000111000001011 *
00048: 000011000011011 *
00049: 110000010001010
00050: 100110100000010
00051: 100101000001010
00052: 100100010001010
00053: 100001010001010
00054: 100001010001001
00055: 100001000011001
00056: 100001000001011
00057: 001001000011001
00058: 000111000001010 *
00059: 000101000001011
00060: 000011000001011
00061: 000001001011001
00062: 000001000011011
00063: 110000011000000
00064: 110000010001000
00065: 110000010000010
00066: 110000000001010
00067: 100100010000010
00068: 100100000001010
00069: 100001010001000
00070: 100001000001010
00071: 100001000001001
00072: 100000010001010
00073: 010010000001010
00074: 000110000001010
```

```
00075: 000101000001010
00076: 000011000001010
00077: 000001000011001
00078: 000001000001011
00079: 110000010000000
00080: 110000001000000
00081: 110000000001000
00082: 110000000000010
00083: 100100000000010
00084: 100001000001000
00085: 100000011000000
00086: 100000010001000
00087: 100000010000010
00088: 100000000001010
00089: 010010000000010
00090: 010000000001010
00091: 000110000000010
00092: 000100000001010
00093: 000010000001010
00094: 000001000001010
00095: 000001000001001
00096: 110000000000000
00097: 100000010000000
00098: 100000001000000
00099: 100000000001000
00100: 100000000000010
00101: 010000001000000
00102: 010000000001000
00103: 010000000000010
00104: 000100000000010
00105: 000010000000010
00106: 000001000001000
00107: 000000000001010
00108: 100000000000000
00109: 010000000000000
00110: 000000001000000
00111: 000000000001000
00112: 000000000000010
00113: 000000000000000
```

Literaturverzeichnis

[Bau90] Bernd Baumgarten. *Petri-Netze: Grundlagen und Anwendungen.* Mannheim: BI-Wissenschaftsverlag, 1990.

[BF86] Eike Best and César Fernández. *Notations and Terminology on Petri Net Theory.* Number 195. Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung mbH Arbeitspapiere der GMD, St. Augustin, January 1986.

[Car87] H. Carstensen. *Fairneß bei nebenläufigen Systemen.* Universität Hamburg, Inst. für Informatik, Bericht Nr. 126, FBI-HH-B-126/87, February 1987.

[DE95] Jörg Desel and Javier Esparza. *Free Choice Petri nets.* Number 40. Cambridge University Press Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science, 1995.

[Gol95] Robert Gold. A compositional dataflow semantics for petri nets. *Acta Informatica*, 32(7):627–645, 1995.

[JV87] E. Jessen and R. Valk. *Modelle für Rechensysteme.* Springer, 1987.

[Lau75] K. Lautenbach. *Liveness in Petri Nets.* St. Augustin: Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung Bonn, Interner Bericht ISF-75-02.1, 1975.

[LR78] L. H. Landweber and E. L. Robertson. Properties of conflict free and persistent petri nets. *Journal of the ACM 25*, (3):352–364, July 1978.

[Mur89] Tadao Murata. Petri nets: Properties, analysis and applications. In *Proceedings of the IEEE*, pages 541–580, April 1989.

[Rei85] W. Reisig. *Petri Nets.*, volume 4. Springer-Verlag EATCS Monographs on Theoretical Computer Science, original edition, 1985.