Zur Lösung des Halskettenproblems

Reinhard Rauscher, Rainer Lang

4. April 2000

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Vorwort

Die Idee zu den Untersuchungen kam von Herrn Rainer Lang. Eine Literaturrecherche hierzu ergab, dass es zwar eine Vielzahl von Anwendungen und Untersuchungen des Halskettenproblems (engl. necklace bzw. bracelet) gibt [10, 11, 12, 13, 14, 16], aber keine geschlossene Formel in der Literatur zu finden ist. Die genannten Arbeiten beschränken sich außerdem auf Ketten, die nur aus Steinen von genau zwei Farben bstehen. Lediglich in den Arbeiten von [2] liess sich eine asymptotische Abschätzung der Anzahl unterschiedlicher Ketten, die aus mehr als zwei Farben bestehen, finden.

Erste eigene Analysen - zu dem anfangs als trivial erachteten Problem - mittels Papier, Bleistift und Geduld scheiterten daran, dass bereits bei kleinen Problemen kaum noch überschaubar war, welche Ketten per Rotation bzw. Spiegelung auf andere Ketten abbildbar waren. Abhilfe schaffte hier ein von Manfred Grove erstelltes Programm, welches durch vollständige Enumeration nicht nur die Anzahl möglicher Ketten, sondern die Ketten selbst ermittelte (dieser Ansatz entspricht dem in [15] verfolgten Konzept). Hierdurch war es möglich, zum einen kritische Ketten zu ermitteln, zum anderen diente dieses Programm als Kontrolle für die sich konkretisierenden Formeln.

Erstaunlicherweise stellte sich während der Analysen heraus, dass zur Lösung der Aufgabenstellung Primfaktorzerlegungen und Palindrome eine wesentliche Rolle spielen.

Als sich herauskristallisierte, dass sich bei gewissen größeren Problemen Spezialfälle ergaben, konnte dieses Programm allerdings nicht mehr eingesetzt werden. Ab diesem Zeitpunkt kontrollierte Reinhard Rauscher die Ergebnisse seiner Formeln durch Durchrechnen verschiedener Permutationen des eigentlichen Problems. Beispielsweise ist die Wahl des *Startsteins* für die Gesamtlösung irrelevant. Damit verhält sich das Problem [1, 30] (1 Stein von Farbe a, 30 Steine von Farbe b) genau wie das Problem [30, 1]. Da aber für beide Probleme unterschiedliche Formeln verwendet werden, kann man hierdurch - in Grenzen - die Formeln selbst kontrollieren.

Momentan existiert ein Programm, welches Probleme mit bis zu 999 Steine bei maximal 14 Farben behandeln kann.

Unser Dank gilt zum einen Herrn Manfred Grove (TECH), der durch ein Programm die ersten Untersuchungen vorangetrieben hat, aber auch den Herren Matthias Jantzen und Olaf Kummer (TGI), die hilfreiche Literaturangaben und Beweisideen zum Problem der Palindrome beigesteuert haben.

Kapitel 1

Einleitung/Problemstellung

1.1 Problemstellung

Problem informal:
Gegeben sind mehrere Sorten von unterschiedlich gefärbten Steinen. Wenn man sie zu einer Halskette aufreiht, **WIEVIELE** *unterschiedliche Ketten bis auf Spiegelung und Rotation (Rosenkranzprinzip) könnte man konstruieren??*

Problem formal:
Gegeben seien n Steine der Farben 1, ... k, $k > 1$. Zur Farbe $j, j \in \{1, ..., k\}$ mögen m_j Steine gehören. Im Folgenden wird diese Vorgabe mit $[m_1, ..., m_k]$ dargestellt.

Beispielsweise entspricht die Vorgabe $[2, 2, 4]$ folgender Prämisse: Es seien 2 Steine der Farbe a, 2 Steine der Farbe b und 4 Steine der Farbe c gegeben.

Eine *Kette* (oder *Halskette*) wird als Zeichenkette $x = x_1, ...x_n$ notiert, wobei

- $\forall i \in \{1, ..., n\} : x_i \in \{1, ..., k\}$ **und**
- Für jede Farbe $j \in \{1, ..., k\}$ sei m_j die Anzahl der Symbole j in x.

Beispiel für den Fall, dass zwei Farben mit je zwei Steinen existieren:
Eine Kette sei 1122;

Illustration des Problems anhand eines Bilds: Abbildung 1.1 zeigt die Anzahl der verschiedenen Anordnungen von jeweils 2 Steinen der Farben Weiss und Schwarz. Im folgenden sind derartige Ketten mit n Steinen einfach durch Wörter der Länge n dargestellt.

Nach Berücksichtigung der Rotation können einige Ketten durch andere dargestellt werden. Abbildung 1.2 zeigt die beiden verbliebenden möglichen Ketten nach Berücksichtigung der Rotation.

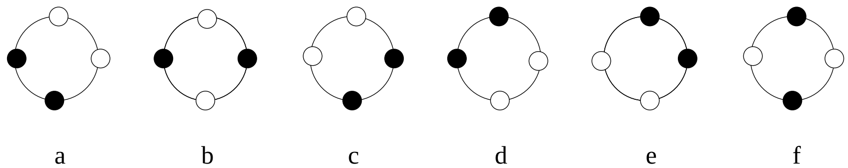

Abbildung 1.1: Illustration der Möglichkeiten zum Problem [2, 2]

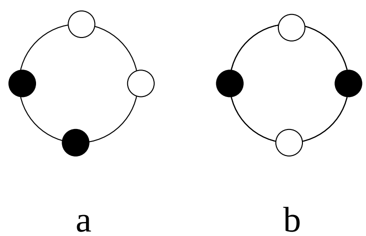

Abbildung 1.2: Verbleibende Möglichkeiten zum Problem [2, 2] nach Berücksichtigung der Rotation

Vergleicht man Abbildung 2.1 mit Abbildung 2.2., so wird klar, dass die in Abbildung 2.1. aufgezählten Fälle c) bis f) jeweils durch Rotation einer der beiden in Abbildung 2.2. dargestellten Fälle überführt werden können.

1.2 Grundlegende Definitionen

Folgende Kurzbezeichnungen wurden verwandt:

- Mit λ wird das *leere Wort* (oder die *leere Kette*) symbolisiert.
- Sei $k = k_1k_2...k_x$ eine (Teil-) Kette.
  Mit $l(k)$ wird die Länge von k bezeichnet. $l(k) = x$.
- Mit k^{rev} wird die invertierte Kette bezeichnet.
  $k' = k_x....k_2k_1$.

- **EP** bezeichne die Menge der *Erweiterten Palindrome*, dies sind Ketten der Form $k = xw = xw^{rev}, l(x) = 1$
- **PA** bezeichne die Menge der Ketten, die Palindrome bilden $k = w = w^{rev}$
- **IN** bezeichne die Menge der für die Spiegelung relevanten Ketten. Es gilt:
  $IN = EP \cup PA$

  Sei k eine Kette. Mit $\mathbf{k} \uparrow \mathbf{i}$ sei die Kette bezeichnet, die durch Rotieren nach links um i Stellen aus k hervorgeht.
  Formal: $k = x_1, ...k_n$, $k \uparrow i = x_{i+1}...x_n x_1, ...x_i$

- $\mathbf{f_{spi}}(\mathbf{k}) = min\{n \geq 1 | k \uparrow n \in IN\}$
- $\mathbf{f_{rot}}(\mathbf{k}) = min\{n \geq 1 | k \uparrow n = k\}$
- $\mathbf{g}(\mathbf{k}) = k \uparrow f_{spi}(k)$
- $\mathbf{r}(\mathbf{k}) = min\{n > 0 | k \uparrow n = k\}$

Def.: Zwei Ketten k_1, k_2 heißen *rotationsäquivalent*, wenn gilt:
$\exists i \in \{1, ..., n\} : k_2 = k_1 \uparrow i$.
Informal: Wenn nach Ausführung von mindestens einem, aber maximal $n - 1$ Rosenkranzschritten aus k_1 die Kette k_2 entsteht. Erläuterung : Wenn es ein p gibt mit:
$k_1 = x_1...x_{p-1}x_p...x_n$
$k_3 = x_p...x_n x_1...x_{p-1}, p \neq 1, p \leq n$

und $k_2 = k_3$.

Def.: Zwei Ketten k_1, k_2 heißen *spiegelrotationsäquivalent*, wenn gilt:
$\exists i \in \{1, ..., n\} : k_2 = k_1 \uparrow i$ ODER
$\exists i \in \{1, ..., n\} : k_2 = k_1^{rev} \uparrow i$

Informal: Wenn nach Ausführung von mindestens einem, aber maximal n Rosenkranzschritten aus k_1 ODER aus k_1^{rev} die Kette k_2 entsteht.

Bem.: Dass es sich bei den Relationen *spiegelrotationsäquivalent* und *rotationsäquivalent* um Äquivalenzklassen handelt, ist trivial zu zeigen.

Bem.: Die sich hier stellende Aufgabe ist die Ermittlung der Anzahl der verschiedenen Äquivalenzklassen zu *spiegelrotationsäquivalent*.

Def.: Eine Kette k heisst *zu sich selbst invers bzgl. Rotation* ($invrot$), wenn gilt: $f_{rot}(k) < n$.

Erläuterung: k ist *zu sich selbst invers bzgl. Rotation*, wenn nach Ausführung von mindestens einem, aber weniger als n Rosenkranzschritten dieselbe Kette entsteht. Oder: Wenn es eine Kette k_j gibt mit:

$k = x_1 ... x_{p-1} x_p ... x_n$

$k_j = x_p ... x_n x_1 ... x_{p-1}, p \neq 1$

und $k = k_j$.

Def.: Eine Kette k heisst *zu sich selbst invers bzgl. Rotation und Spiegelung* ($invrotispi$), wenn gilt: $f_{rot}(k^{rev}) < n$.

Erläuterung: Wenn es eine Kette k_j gibt mit:

$k = x_1 ... x_{p-1} x_p ... x_n$

$k^{rev} = x_n ... x_p x_{p-1} ... x_1$

$k_j = x_{p-1} ... x_1 x_n ... x_p$

und $k = k_j$.

Def.: Die *Spiegelung* k_{1sp} einer Kette k_1 wird wie folgt definiert:

$k_{1sp} = k_1^{rev}$.

Def.: Eine Kette k heißt *symmetrisch* oder *Palindrom*, wenn gilt:

$k = k^{rev}$

1.3 Konvention

Konvention: Zum Vermeiden von Mißverständnissen wird folgende Konvention verwendet:

- MK_{ges} bezeichne die Gesamtmenge von Ketten (ohne Berücksichtigung der Rotation und Spiegelung).
- MK_{sta} bezeichne die Gesamtmenge von Ketten (ohne Berücksichtigung der Rotation und Spiegelung), die mit einem Stein aus der *willkürlich* gewählten Farbe *sta* beginnen. Diese willkürlich gewählte Farbe wird im Folgenden auch mit Startsteinfarbe bezeichnet.
- MK_{rot} bezeichne die Menge der Äquivalenzklassen bzgl. *rotationsäquivalent*. Informal ist dies die Gesamtmenge von Ketten nach Berücksichtigung der Rotation (ohne Berücksichtigung der Spiegelung).
- MK_{sprot} bezeichne die Menge der Äquivalenzklassen bzgl. *spiegelrotationsäquivalent*. Informal ist dies die Gesamtmenge von Ketten nach Berücksichtigung der Rotation und Spiegelung.

Gesucht ist nach: $|MK_{sprot}|$!!

Bem.: Trivialerweise muß gelten:
$|MK_{ges}| \geq |MK_{sta}| \geq |MK_{rot}| \geq |MK_{sprot}|$.

Kapitel 2

Gesamtzahl der Ketten

2.1 Trivialfall

Eine erste Frage, die sich stellt, ist: *Wieviele unterschiedliche Ketten gibt es insgesamt ?*
Mit anderen Worten: *Wie groß ist* $|MK_{ges}|$ *?*

Vorerst erfolgt die Behandlung des Falles, bei dem alle Steine unterschiedlich gefärbt sind:
Anzahl der möglichen Ketten (zu jeweils unterschiedlichen Steinen) ist:

$$Formel\ 1.1. \qquad |MK_{gesTrivial}| \ = \ n!$$

Beweis:
trivial.

2.2 Allgemeiner Fall

Im allgemeinen Fall (es können gleichfarbige Steine auftreten) ist die Lösung diffiziler.
Die Anzahl der möglichen Ketten ist:

$$\textit{Formel 1.2.} \qquad |MK_{ges}| = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{k} m_i!}$$

Beweis:
siehe [1] S. 97-99.

Kapitel 3

Anzahl Ketten mit führendem Startstein

Im folgenden wird davon ausgegangen, dass ein Stein sozusagen als Anfangsstein definiert wird. Motiviert ist dieser Ansatz dadurch, daß bei realen Halsketten oft ein ausgezeichneter Anfangspunkt durch das Kettenschloß gegeben ist. Sollte so ein eindeutiger Anfangspunkt (Startstein) gegeben sein, vereinfacht sich das Problem sehr stark.

Wieviele unterschiedliche Ketten zu einer willkürlich ausgewählten Startsteinfarbe existieren, zeigt folgende Formel:

$$Formel\ 2.1. \qquad |MK_{sta}| = \frac{m_{Startstein} * (n-1)!}{(\prod_{i=1}^{k} m_i!)}$$

Beweis:

Für den ersten Stein aus der Kette ist einer der Startsteine zu wählen (Dies ist ein MUSS). Hierdurch ergeben sich keine Wahlmöglichkeiten! Es verbleiben für die weitere Anordnung $(n-1)$ Steine insgesamt. Die Anzahl der noch anzuordnenden Startsteine ist $m_{Startstein} - 1$. Nach Formel 1.2. ergeben sich hiernach:

$|MK_{sta}| = \frac{(n-1)!}{(\prod_{i=1}^{k} m_i!) \star \frac{1}{m_{Startstein}}}$

Der zusätzliche Faktor im Nenner, nämlich $\frac{1}{m_{Startstein}}$ ist dadurch begründet, dass bereits ein Stein aus der Startsteinmenge fixiert war:

$(m_{Startstein} - 1)! = \frac{m_{Startstein}!}{m_{Startstein}}$.

Damit folgt die o.g. Formel.

q.e.d.

Kapitel 4

Ansatz für die Rotation ohne Startsteine

Sei MK_{ges} die Menge von Ketten nach Formel 1.2. Diese Menge wird vorerst als Allmenge betrachtet. Die Mächtigkeit dieser Menge läßt sich einfach berechnen, wie gezeigt wurde.

Geht man von den bereits behandelten allgemeinen Fällen aus, bei denen die Rotation noch nicht berücksichtigt wurde, so ist zu erwarten, daß nach Berücksichtigung der Rotation die Anzahl der Äquivalenzklassen deutlich abnimmt.

Dies ergibt sich schon alleine aus der Überlegung, daß vorher noch unterschiedliche Ketten durch Rotation ineinander überführt werden können. Beispielsweise läßt sich die Kette $k_1 = 1122$ in die Kette $k_2 = 1221$ überführen.

Eine intuitive Idee wäre, anzunehmen, dass jeweils n (Zur Erinnerung: n ist die Länge der Kette) Ketten durch Rotation ineinander überführbar sind.

Liegen zwei Ketten in derselben Äquivalenzklasse bzgl. der Relation *rotationsäquivalent*, so wird dies im Folgenden mit Zusammenfallen bezeichnet.

Erläuterung anhand des Beispielproblems [2, 6]:

Die Kette 12222122 fällt durch Rotation zusammen mit 12212222. Dies wird in Abbildung 4.1 illustriert. Ferner liegen in der Äquivalenzklasse von 12222122 sechs weitere Ketten, die jeweils mit einem Stein der Farbe 2 beginnen. Damit ist die Mächtigkeit der Äquivalenzklasse von 12222122 bzgl. der Relation *rotationsäquivalent* ermittelt, nämlich 8.

Im Prinzip stimmt die oben geäusserte intuitive Vermutung, es gibt allerdings einige Spezialfälle, nämlich solche Ketten, die folgende Struktur aufweisen:

$k_{Special} = aa$, wobei a eine Teilkette bildet.

Bei diesen Ketten fallen deutlich weniger als n Ketten zusammen. Mit anderen Worten: Die Mächtigkeit der zugehörigen Äquivalenzklasse ist deutlich

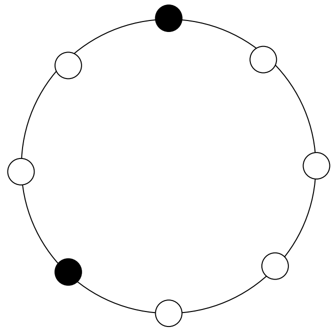

Abbildung 4.1: Illustration zum Zusammenfallen der Ketten

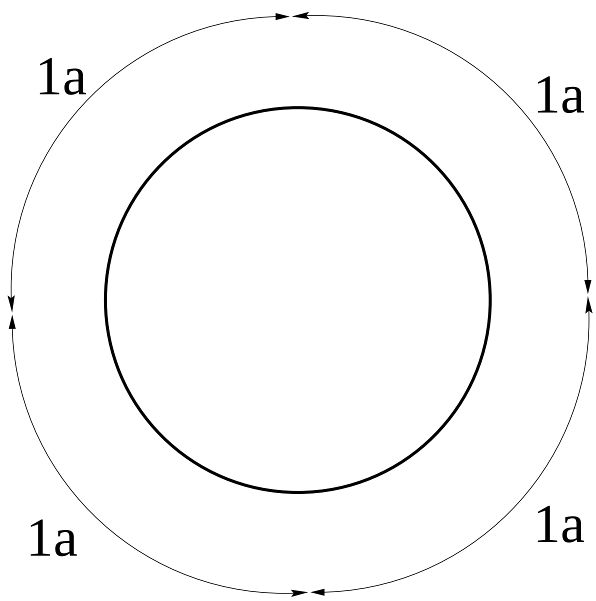

Abbildung 4.2: Illustration zum Fall, dass die Kette aus mehreren identischen Teilketten besteht

geringer als bei solchen Ketten, die nicht dieses Struktur haben. Dies wird sofort klar, da eine Rotation der o.g. Kette $k_{Special}$ um die Teilkette a wieder dieselbe Kette bildet.

In Abbildung 4.2 ist dieser Fall beispielhaft dargestellt. Die Abbildung zeigt eine Kette, die in 4 identische Teilketten zerfällt. Offensichtlich reduziert sich hier die Anzahl von Ketten, die durch Rotation ineinander überführt werden können.

Der Rotationsoperator bewirkt eine Aufteilung der Gesamtmenge der Ketten, nämlich folgende Klassen von Ketten:

1. Ketten, die mit $n - 1$ Ketten zusammenfallen. (Dies wäre der o.g. allgemeine Fall).
2. Ketten, die mit $x - 1$ Ketten zusammenfallen. Mit: x teilt n.
3. Ketten, die nicht mit anderen Ketten zusammenfallen. Spezialfall zu 2. mit $x = 1$.

Beispiel: Das Problem sei [4, 2, 2].
Beispiel für Ketten der Art 1: Die Kette 12111332, fällt zusammen mit folgenden Ketten: 11133212, 11332121, 13321211, 33212111, 32121113, 21211133, 21113321.

Beispiel für Ketten der Art 2: Die Kette 12131213, fällt zusammen mit: 13121312 31213121 21312131.

Es ist zu vermuten: Zu jedem Teiler von n gibt es jeweils eine Menge von Ketten, die durch Rotation zusammenfallen.

Grundidee: Zu jedem Teiler tt (nicht unbedingt Primteiler, incl. 1 und n) von n berechne man

- Die Anzahl von Ketten, die aus tt oder Vielfachen von tt identischen Ketten bestehen.
  Diese Anzahl von Ketten wird im folgenden mit $ges(tt)$ bezeichnet.
- Die Anzahl von Ketten, die aus genau tt identischen Ketten bestehen. Diese Anzahl von Ketten wird im folgenden mit $gen(tt)$ bezeichnet.

Erläuterung anhand des Beispielproblems [4, 4]:

ges(4) = 2, wg. der Kette 12121212.
ges(2) = 6, wg. der Ketten $1a1a$, mit $a \in \{122, 212, 221\}$
ges(1) = 70. (Gesamtmenge aller Ketten nach Formel 1.2.)

4.1 Berechnung von ges

$ges(tt)$ ist die Anzahl von Ketten, die aus mindestens tt identischen Teilketten bestehen. Diese Ketten haben damit folgende Form: $a_1 a_2 .... a_{tt-1} a_{tt}$ mit $a_1 = a_j \forall j \in \{2, ..., tt\}$.

Die Mächtigkeit dieser Menge ergibt sich durch:

Formel 3.1.
$$ges(tt) = \begin{cases} \frac{((n)/tt)!}{\prod\limits_{i=1}^{k} (m_i/tt)!} & \text{falls alle } m_i \text{ Vielfache von } tt \text{ sind} \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Beweis:
1. Fall: alle m_i sind Vielfache von tt:

Ketten aus der Menge $ges(tt)$ bestehen aus tt identischen Teilketten. Damit haben diese Teilketten die Struktur $y_1 ..... y_s$. Da tt solche Ketten existieren müssen, ergibt sich für s (Länge der Teilkette):

$s = n/tt$. (Alle Teilketten haben die Länge n/tt).

Um die Anzahl der Ketten zu ermitteln, reicht es, nur eine einzige Teilkette zu betrachten. Zu berücksichtigen ist dann aber auch, dass n und die m_i jeweils durch tt zu dividieren sind.
$n' = n/tt$
$m_i' = m_i/tt \quad \forall i \in \{1, ..., k\}$

Nach Formel 1.2. ergibt sich:
$ges(tt) = \frac{(n')!}{(\prod\limits_{i=1}^{k} m_i'!)}$

Damit folgt o.g. Formel.

2. Fall: Es gilt nicht, dass alle m_i Vielfache von tt sind:

Wg. der Prämisse kann keine Kette konstruiert werden, die aus tt identischen Teilketten besteht. Damit gilt $ges(tt) = 0$.

q.e.d.

4.2 Berechnung von gen

Sei mit TT die Menge aller Teiler von n bezeichnet. Hierin sind auch 1 und n enthalten.

Sei ein $tt \in TT$ gegeben. Mit TTp(tt) ist folgende Menge von Teilern von n bezeichnet:

$TTp(tt) := \{tt * x \mid tt * x \text{ teilt } n \text{ und } x > 1\}$

$$Formel\ 3.2 \quad gen(tt) = ges(tt) - \sum_{tt2 \in TTp(tt)} gen(tt2)$$

Überlegung hierzu:
Zu einem gegebenen $tt \in TT$ ist zur Ermittlung von $gen(tt)$ auszugehen von $ges(tt)$. Abzuziehen sind von $ges(tt)$ alle Ketten, die in mehr als tt identische Teilketten zerfallen können. Dies ist gerade die Summe über $tt2$.

Es folgt die Erläuterung anhand eines Beispiels. Sei folgendes Beispielproblem gegeben: [6, 6].
ges(1) = 12! / 6!/6!= 12*11*10*9*8*7 / 6! = 2* 11*2*3* 7= 44* 21= 924
ges(2) = 6! / 3!/3! = 6*5*4/3! =20
ges(3) = 4! / 2 !/2! = 4*3/ 2!=6
ges(6) = 2! / 1!*1!= 2

Es folgt die Berechnung der Werte *gen(tt)* zum Beispielproblem [6, 6]:

gen(6) = ges(6) = 2
gen(2) = ges(2) - gen(6) = 20 -2 =18
gen(3) = ges(3) - gen(6) = 6 - 2 = 4
gen(1) = 924 - gen(2) - gen(3) - gen(6) = 924 -18 -4 -2 = 900

Behauptung: $gen(tt)$ ist die Anzahl von Ketten mit genau tt Teilketten.

Beweis:
$ges(tt)$ gibt nach Definition die Anzahl der Ketten mit mindestens tt identischen Teilketten an. Demnach sind zur Ermittlung von $gen(tt)$ genau die Ketten abzuziehen, die aus ttt Teilketten bestehen, mit ttt ist Vielfaches von tt.

q.e.d.

Dies wird durch Abbildung 4.3 illustriert. Angenommen, das Problem [15, 15] (jeweils 15 Steine von zwei Farben) ist zu lösen. Gesucht ist die Mächtigkeit der einzelnen Mengen $gen(2), gen(3), gen(5), gen(6), gen(10)$ und $gen(15)$.

Es gilt:
$gen(2) = ges(2) - ges(2*3) - ges(2*5) + ges(2*3*5)$
$= ges(2) - ges(6) - ges(10) + gen(30)$
$= ges(2) - (gen(6) + gen(30)) - (gen(10) + gen(30)) + gen(30)$
$= ges(2) - gen(6) - gen(10) - gen(30)$

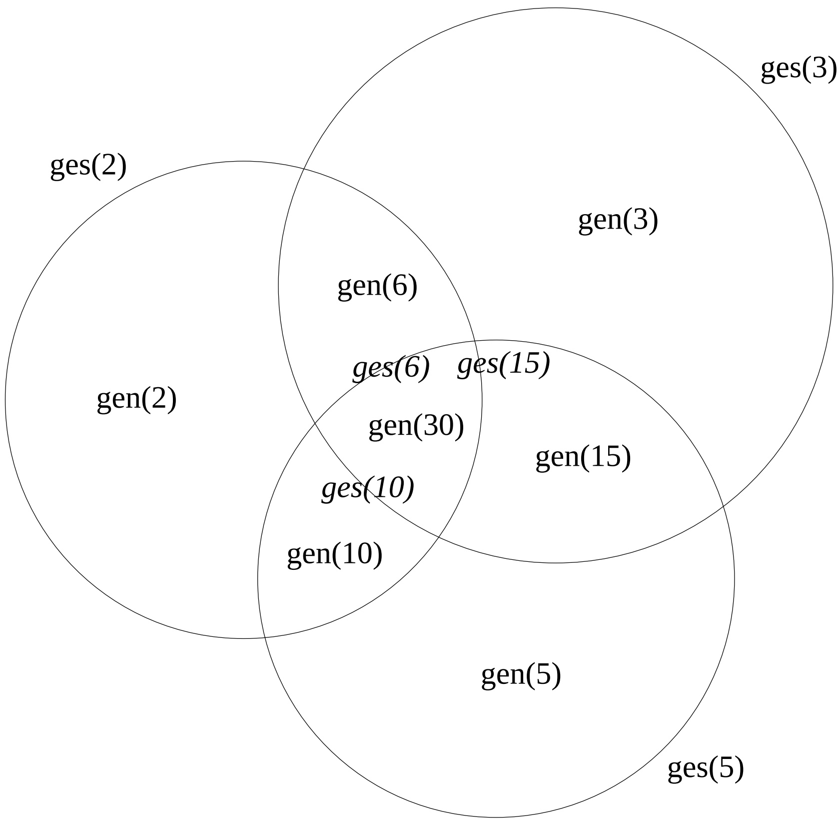

Abbildung 4.3: Illustration zum Prinzip der Inklusion/Exklusion

4.3 Berechnung gesamt für die Rotation

Die Berücksichtigung der Rotation könnte - wie schon ausgeführt - intuitiv wie folgt vorgenommen werden:

Man berechne zunächst die Anzahl von Ketten nach Formel 1.2., teile diese Anzahl durch n und erhält danach die verbleibende Anzahl von Ketten nach Berücksichtigung der Rotation.

Überlegung hierzu ist, dass durch die Rotation jeweils n Ketten zusammenfallen.

Im Prinzip wird hier so verfahren, allerdings wird nicht generell durch n geteilt, sondern je nach Art der Kette ein Divisionsfaktor ermittelt. Dieser Divisionsfaktor entspricht der jeweiligen Mächtigkeit der Äquivalenzklassen bzgl. der Relation *rotationsäquvalent.*

Die Gesamtmenge der verbleibenden Äquivalenzklassen nach der Rotation ist:

$$Formel\ 3.3 \qquad |MK_{rot}| = \sum_{tt \in TT} \frac{gen(tt)}{n/tt}$$

Erläuterung im Beispielproblem [6, 6]:
Die Summe ($|MK_{rot}|$) ist: 900/12 + 18/6 + 4/4 + 2/2= 75 + 3 +1+ 1 = 80.

Beweis zu Formel 3.3.:

$ges(tt)$ beschreibt die Gesamtzahl von Ketten mit der Eigenschaft, dass sie aus mind. tt identischen Ketten bestehen.
$gen(tt)$ beschreibt die Gesamtzahl von Ketten mit der Eigenschaft, dass sie aus genau tt identischen Ketten bestehen.

Gegeben ist die Anzahl der Ketten nach Formel 1.2. Diese Anzahl ist identisch zu $ges(1)$. Dies kann man leicht zeigen durch Einsetzen der 1 in Formel 3.1. Geht man hiervon als Allmenge aus, muß sich jede Kette in genau einer der Äquivalenzklassen bzgl. *rotationsäquivalent* wiederfinden. Die einzelnen Äquivalenzklassen sind allerdings unterschiedlich mächtig. Ihre Mächtigkeit ist aber relativ einfach zu ermitteln, nämlich n/tt.

Ferner gilt, da $ges(1)$ alle Ketten beinhaltet:
$ges(1) = \sum_{tt \in TT} gen(tt)$

Berücksichtigt man, dass jede Äquivalenzklasse einer beliebigen Kette aus $gen(tt)$ die Mächtigkeit n/tt hat, folgt die Behauptung.

q.e.d.

Im Falle, dass gilt: $ggt(m_1, m_2, ...m_k) = 1$, kann das Problem deutlich reduziert werden:

$$\textit{Formel 3.4.} \qquad |MK_{rot}| = \frac{(n-1)!}{\prod\limits_{i=1}^{k}(m_i)!}$$

Beweis: Dies läßt sich sehr einfach aus der allgemeinen Formel 1.2. herleiten !
Aufgrund der Prämisse folgt: $ges(x) = 0 \quad \forall x > 1$.
Es gilt: $ges(1) = |MK_{ges}|$ und $ges(1) = gen(1)$.
Nach Formel 3.3 folgt: $|MK_{rot}| = |MK_{ges}|/n = \frac{(n-1)!}{\prod\limits_{i=1}^{k}(m_i)!}$

q.e.d.

Kapitel 5

Spiegelung

5.1 Grundlegende Sätze

Satz 1: Sei k eine symmetrische Kette, die aus mindestens zwei Farben besteht, und sei x ein beliebiger Stein.
Dann ist die Kette k_{neu} mit $k_{neu} = xk$ nicht symmetrisch.

Beweis:
Es gibt einen ersten Stein einer anderen Farbe. Dieser 'rutscht' dann aus der Symmetrie.

k habe folgende Struktur:

$k = x_1 x_2 ...... x_{n-1} x_n$

Nach Prämisse (k symmetrisch) gilt: $k = k^{rev}$.

k kann wie folgt zerlegt werden: $k = aba$, mit a ist die längste Teilkette, die nur identisch gefärbte Steine beinhaltet. Falls der zusätzliche Stein x nicht die Farbe von a hat, ist die Kette nicht symmetrisch, am Ende fehlt ein entsprechender Stein.

Falls der zusätzliche Stein x die Farbe von a hat, entsteht am Anfang von k_{neu} eine längere Teilkette als am Ende. Da sowohl der erste als auch der letzte Stein von b nicht die Farbe von x haben kann, gilt die Behauptung.

q.e.d.

Satz 2: Eine Kette k ist genau dann zu sich selbst invers bzgl. Spiegelung und Rotation, wenn gilt:
$k = k_1 k_2$ mit k_1, k_2 sind symmetrisch.

Beispielketten zu Satz 2:
1234432 1212 121121 12133 .

Beweis:
$\leftarrow$
Sei $k = k_1 k_2$ eine Kette mit k_1, k_2 sind jeweils symmetrisch. Es gilt k_{neu} (nach Spiegelung von k) ist:
$k_{neu} = k^{rev} = k_{2neu} k_{1neu}$.

Wegen Symmetrie von k_1 und k_2 folgt: $k_{neu} = k_2 k_1$.

k_{neu} kann durch Rotation in k_{gneu} überführt werden mit : $k_{gneu} = k_1 k_2$

Damit gilt $k = k_{gneu}$. Dann ist k zu sich selbst invers.

q.e.d.

$\rightarrow$

Sei k eine zu sich selbst inverse Kette. Die Kette k hat folgende Struktur:
$k = x_1 x_2 ... x_{n-1} x_n$.
Die Kette k_{neu} gehe aus k durch Spiegelung hervor:
$k_{neu} = x_n x_{n-1} ... x_2 x_1$.

k_{gneu} gehe aus k_{neu} durch Rotation hervor:
$k_{gneu} = x_p x_{p-1} ... x_1 x_n x_{n-1} ... x_{p+1}$.

Nach Prämisse gilt: Es gibt ein p, so dass $k = k_{gneu}$ gilt. Da die Ketten k und k_{gneu} komponentenweise identisch sein müssen, folgt:
$x_p = x_1$
$x_{p-1} = x_2$
....
$x_2 = x_{p-1}$
$x_1 = x_p$
und
$x_n = x_{p+1}$
$x_{n-1} = x_{p+2}$
....
$x_{p+1} = x_{n-1}$
$x_p = x_n$

Damit gibt es jeweils eine symmetrische Teilkette k_1, k_2:

$k_1 = x_1, \ldots x_p$
$k_2 = x_{p+1} \ldots x_n$

q.e.d.

Bem.: Falls $k = k^{rev}$ und $p = n$ (Rotation um 360^0), dann ist $k = \lambda$ (leeres Wort) und es gilt: $k_1 = k$.

Satz 3: Sei $k = k_1 k_2$, mit k_1, k_2 seien symmetrische Ketten.

Dann kann k per Rotation in eine Kette $k_{neu} = k_{1neu} k_{2neu}$ überführt werden mit $l(k_{1neu}) \leq 1$.

Beweis:
k_1 ist symmetrisch, d.h. k_1 kann wie folgt zerlegt werden:
$k_1 = k_{anf} x k_{end}$ mit $l(k_{anf}) = l(k_{end})$ und $k_{anf} = k_{end}^{rev}$, $l(x) \leq 1$.
Einsetzen von $k_1 = k_{anf} x k_{end}$ ergibt:
$k = k_{anf} x k_{end} k_2$.
Durch Rotation erreicht man k_{neu} mit: $k_{neu} = x k_{end} k_2 k_{anf}$. Die Teilkette k_{neu} zerfällt in folgende Struktur: $k_{neu} = k_{1neu} k_{2neu}$ mit:
$k_{1neu} = x$. $k_{2neu} = k_{end} k_2 k_{anf}$.
Wg. k_2 symmetrisch, ist auch $k_{2neu} = k_{end} k_2 \ k_{anf} (k_{end} = k_{anf}^{rev})$ symmetrisch.
q.e.d.

FAZIT: Es reicht, nur Ketten $k = k_1 k_2$ mit $l(k_1) \leq 1$ zu betrachten.

Satz 4: Gegeben zwei Ketten $k_1 = a \ rest_1$ und $k_2 = a \ a \ rest_2$ mit:

$rest_1$ und $rest_2$ sind symmetrische Ketten, l(a) =1. Ferner existiere keine Farbe ungerader Mächtigkeit, aber mind. 2 Farben. Es gilt dann: $k_1 \neq k_2$.

Beweis:
Angenommen, es gelte $k_1 = k_2$. Dann folgt $rest_1 = a \ rest_2$. Nach Satz 1 folgt, dass $a \ rest_2$ keine symmetrische Kette sein kann, damit ist k_1 nicht symmetrisch. Widerspruch zur Annahme.
q.e.d.

Satz 5: Seien alle Farben gerader Mächtigkeit.
Es gibt dann
$\frac{(n/2)!}{\prod_{i=1}^{k}(m_i/2)!}$ unterschiedliche Ketten k, wobei k Palindrom ist.

Beweis:
Es reicht, nur die erste Hälfte einer zu konstruierenden Kette zu betrachten, die zweite Hälfte ist durch Forderung nach Symmetrie (k muss Palindrom sein) fest. Hierdurch reduziert sich das Problem auf n', m_i' mit:
$n' = n \ div \ 2$
$m_i' = m_i \ div \ 2 \ \forall i \in \{1, ..., k\}$

Die Anzahl der Möglichkeiten, hieraus eine Kette zu konstruieren, ergibt Formel 1.2.:
$\frac{(n')!}{\prod_{i=1}^{k}(m_i')!}$
q.e.d.

Satz 6: Seien n Steine gegeben. Ferner existiere maximal eine Farbe ungerader Mächtigkeit.

Es gibt dann
$\frac{(n \ div \ 2)!}{\prod_{i=1}^{k}(m_i div 2)!}$ viele verschiedene symmetrische Ketten.

Beweis:
Es reicht, nur die erste Hälfte einer zu konstruierenden Kette zu betrachten, die zweite Hälfte ist durch Forderung nach Symmetrie fest. Sofern eine ungerade Farbe existiert, MUSS der ungerade Stein in der Mitte der Kette angeordnet sein, sonst kann keine symmetrische Kette existieren. Damit ergibt sich keine Wahlmöglichkeit für diesen Stein. Damit kann das Problem auf den in Satz 5 behandelten Fall 'keine Farbe ungerader Mächtigkeit' zurückgeführt werden.

Nach Satz 5 folgt die Behauptung.

q.e.d.

Bem.: Es darf maximal eine Farbe ungerader Mächtigkeit geben, sonst kann keine symmetrische Kette konstruiert werden.

Satz 7: Seien alle Farben gerader Mächtigkeit.
Es gibt dann
$\frac{(n \ div \ 2)!}{\prod_{i=1}^{k} (m_i \ div \ 2)!}$
unterschiedliche Ketten k, wobei k folgende Struktur aufweist: $k = k_1 k_2$, mit k_2 Palindrom, $l(k_1) = 1$.

Beweis:
Aufgrund der Prämissse (alle Farben haben gerade Mächtigkeit) können Ketten der Struktur $k_1 k_2$ nur wie folgt konstruiert sein:

$k_1 k_2 = k_1 k_{2anf} k_1 k_{2end}$ mit $k_{2anf} = k_{2end}^{rev}$. Die Anzahl der Mglichkeiten zur Konstruktion von $k_1 k_{2anf} k_1 k_{2end}$ ist identisch zu $k_{2anf} k_1 k_1 k_{2end}$.

Nach Satz 5 gibt es hierfür $\frac{(n \ div \ 2)!}{\prod_{i=1}^{k} (m_i \ div \ 2)!}$ Möglichkeiten.

q.e.d.

Zusätzliche Nomenklatur
Motivation: Nach Satz 2 und Satz 3 kann die Betrachtung der selbstinversen Ketten auf Ketten aus IN beschränkt werden (Zur Erinnerung: $IN = EP \cup PA$).

SR bezeichne Menge der Äquivalenzklassen bzgl. spiegelrotationsäquivalent für Ketten aus IN.

Lemma 0: Seien mindestens zwei Farben gegeben. Dann gilt: $EP \cap PA = \phi$.

Beweis: trivial.

Lemma 1: Sei $k \in PA$ und $r(k)$ gerade.
Dann ist $k \uparrow (r(k)/2) \in PA$. Ferner gilt: $k \neq k \uparrow (r(k)/2)$.

Beweis:
k zerfalle wie folgt: $k = k_1 k_2 k_3$, mit $l(k_1) = l(k_2) = (r(k)/2)$. Nach Prämisse gilt $k = k_1 k_2 k_3$ ist Palindrom.

Fallunterscheidung nach k_3:
1. Fall $l(k_3) = 0$
2. Fall $l(k_3) > 0$

Im ersten Fall gilt: k= k_1k_2. Da k Palindrom ist, folgt: $k_1 = k_2^{rev}$. Damit ist $k \uparrow (r(k)/2) = k_2k_1 = k_2k_2'$. Das Ergebnis ist damit ein Palindrom. Bleibt zu zeigen: $k \neq k \uparrow (r(k)/2)$.

k_1 kann kein Palindrom sein, sonst wäre $r(k) \leq l(k_1)$. Damit ist $k_1 \neq k_1'$. Dann folgt $k_1k_2 = k_2'k_1' \neq k_2k_1$.

Im zweiten Fall gilt: k zerfällt in eine Anzahl identischer Palindrome:
$k = k_{pal_1}k_{pal_2}...k_{pal_z}$ mit $k_{pal_1} = k_1k_2$. Ferner ist $k_1 = k_2'$.
Es gilt: $k \uparrow (r(k)/2) = k_2k_{pal_2}...k_{pal_z}k_1$ ist ein Palindrom.
Bleibt zu zeigen: $k \neq k \uparrow (r(k)/2)$. Derselbe Beweis wie in Fall 1.
q.e.d.

Lemma 2: Sei $k \in EP$ und $r(k)$ gerade.
Dann ist $k \uparrow (r(k)/2) \in EP$. Ferner gilt: $k \neq k \uparrow (r(k)/2)$.

Beweis:
Nach Prämisse ($k \in EP, k = k_1k_2$ mit $l(k_1) = 1$, k_2 symmetrisch) gilt:
$\forall i \in \{2, ..., n\} : x_i = x_{n+2-i}$
Ferner gilt nach Def. von $r(k)$:
$\forall i \in \{1, ..., n - r(k)\} : x_i = x_{i+r(k)}$

Ferner gilt: Es gibt ein j mit: $n = j * r(k)$:
$\forall i \in \{2, ..., r(k)\} : x_i = x_{n+2-i} = x_{n+2-i-(j-1)*r(k)} = x_{r(k)+2-i}$
Damit ist die Teilkette $x_2...x_{r(k)}$ symmetrisch, also Palindrom. k zerfalle wie folgt in identische Teilketten: $k = kn_1...kn_j$ mit $l(kn_i) = r(k)$
Konvention: Die Teilkette $kn_2...kn_j$ werden im folgenden durch kne bezeichnet. Ferner zerfalle kn_1 wie folgt:
$kn_1 = kn_{anf}kn_{left}kn_{mitt}kn_{right}$ mit $l(kn_{anf}) = 1, l(kn_{mitt}) = 1$, $l(kn_{left}) = l(kn_{right}) = r(k)/2 - 1$
Die Gesamtzerlegung von k ist dann: $k = kn_{anf}kn_{left}kn_{mitt}kn_{right}kne$
Die Kette $k \uparrow (r(k)/2)$ ist dann: $kn_{mitt}kn_{right}kne\ kn_{anf}kn_{left}$.
Es läßt sich leicht (über den Aufbau von kne) zeigen, dass kne entweder die leere Kette (hier mit λ bezeichnet) ist oder gilt: $kne = kn_{anf}knee$ mit $knee$ ist Palindrom. Es folgt die Fallunterscheidung.

Falls $kne = \lambda$:
$kn_{right}kn_{anf}kn_{left}$ ist Palindrom, damit ist
$k \uparrow (r(k)/2) = kn_{mitt}kn_{right}kn_{anf}kn_{left} \in EP$.
Bleibt zu zeigen, dass $k \uparrow (r(k)/2) \neq k$ gilt:

Angenommen, es gelte $k = k \uparrow (r(k)/2)$, dann folgt: $kn_{mitt}kn_{right}kn_{anf}kn_{left} = kn_{anf}kn_{left}kn_{mitt}kn_{right}$. Damit folgt: $kn_{anf}kn_{left} = kn_{mitt}kn_{right}$. Nach Def. von $r(k)$ müßte sich dann $r(k)$ durch $l(kn_{anf}kn_{left})$ ergeben. Widerspruch.

Falls $kne \neq \lambda$:
$k \uparrow (r(k)/2) = kn_{mitt}kn_{right}kne\ kn_{anf}kn_{left} =$
$kn_{mitt}kn_{right}kn_{anf}knee\ kn_{anf}kn_{left}$.

$kn_{right}kn_{anf}knee\ kn_{anf}kn_{left}$ bildet ein Palindrom, damit ist
$k \uparrow (r(k)/2) \in EP$.

Bleibt zu zeigen, dass $k \uparrow (r(k)/2) \neq k$ gilt: Analoge Behandlung wie bei Fall 1.

q.e.d.

Lemma 3: Sei $k \in PA$ und $r(k)$ ungerade.
Dann ist $k \uparrow ((r(k)-1)/2) \in EP$.
Ferner gilt: $r(k \uparrow ((r(k)-1)/2))$ ist ungerade.

Beweis:
Nach Prämisse ($k \in PA$) gilt:
$\forall i \in \{1, ..., n\} : x_i = x_{n+1-i}$
Ferner gilt nach Def. von $r(k)$:
$\forall i \in \{1, ..., n - r(k)\} : x_i = x_{i+r(k)}$
Ferner gilt: Es gibt ein j mit: $n = j * r(k)$
$x_i = x_{n+1-i} = x_{n+1-i-(j-1)*r(k)} = x_{r(k)+1-i}$
Damit ist die Teilkette $x_1...x_{r(k)}$ symmetrisch, also Palindrom. k zerfalle wie folgt in identische Teilketten: $k = kn_1...kn_j$ mit $l(kn_i) = r(k) \forall i \in \{1, ..., j\}$

Konvention: Die Teilkette $kn_2...kn_j$ werden im folgenden durch kne bezeichnet. Ferner zerfalle kn_1 wie folgt:

$kn_1 = kn_{anf}kn_{mitt}kn_{end}$ mit $l(kn_{mitt}) = 1, l(kn_{anf}) = l(kn_{end}) = (r(k)-1)/2$

Die Kette $k \uparrow ((r(k)-1)/2)$ ist dann: $kn_{mitt}kn_{end}kne\ kn_{anf}$.

Es läßt sich leicht (über den Aufbau von kne) zeigen, dass kne entweder die leere Kette ist oder gilt: kne ist Palindrom. Es folgt die Fallunterscheidung.

Falls $kne = \lambda$:
$kn_{end}kn_{anf}$ ist Palindrom, damit ist
$k \uparrow ((r(k)-1)/2) = kn_{mitt}kn_{end}kn_{anf} \in EP$.
Bleibt zu zeigen, dass $r(k \uparrow ((r(k)-1)/2))$ ungerade ist:

Trivial, $r(k \uparrow ((r(k)-1)/2)) = l(k), l(k)$ ist ungerade.

Falls $kne \neq \lambda$:
$k \uparrow ((r(k)-1)/2) = kn_{mitt}kn_{end}kne\ kn_{anf}$

$kn_{end}kne\ kn_{anf}$ bildet ein Palindrom, damit ist $k \uparrow ((r(k)-1)/2) \in EP$.

Bleibt zu zeigen, dass $r(k \uparrow ((r(k)-1)/2))$ ungerade ist:
$k \uparrow ((r(k)-1)/2) = knee_1....knee_j$ mit $knee_i = kn_{mitt}kn_{end}kn_{anf} \forall i \in \{1,...j\}$.

Damit folgt: $r(k \uparrow ((r(k)-1)/2)) = l(knee_1)$. $l(knee_1)$ ist ungerade.

q.e.d.

Lemma 4: Sei $k \in EP$ und $r(k)$ ungerade.
Dann ist $k \uparrow ((r(k)+1)/2) \in PA$. Ferner gilt: $r(k \uparrow ((r(k)+1)/2))$ ist ungerade.

Beweis:
Nach Prämisse ($k \in EP$) gilt:
$\forall i \in \{2,...,n\} : x_i = x_{n+2-i}$
Ferner gilt nach Def. von $r(k)$:
$\forall i \in \{1,...,n-r(k)\} : x_i = x_{i+r(k)}$
Ferner gilt: Es gibt ein j mit: $n = j * r(k)$
$x_i = x_{n+2-i} = x_{n+2-i-(j-1)*r(k)} = x_{r(k)+2-i}$
Damit ist die Teilkette $x_2...x_{r(k)}$ symmetrisch, also Palindrom. k zerfalle wie folgt in identische Teilketten: $k = kn_1...kn_j$ mit $l(kn_i) = r(k) \forall i \in \{1,....,j\}$

Konvention: Die Teilkette $kn_2...kn_j$ wird im folgenden durch kne bezeichnet. Ferner zerfalle kn_1 wie folgt:

$kn_1 = kn_{anf}kn_{left}kn_{right}$ mit $l(kn_{anf}) = 1, l(kn_{left}) = l(kn_{right}) = (r(k)-1)/2$

Die Kette $k \uparrow ((r(k)+1)/2)$ ist dann: $kn_{right}kne\ kn_{anf}kn_{left}$.

Es läßt sich leicht (über den Aufbau von kne) zeigen, dass kne entweder die leere Kette ist oder gilt: kne ist Palindrom.

Falls $kne = \lambda$:
$kn_{right}kn_{left}$ ist Palindrom, damit ist
$k \uparrow ((r(k)+1)/2) = kn_{right}kn_{anf}kn_{left} \in PA$.
Bleibt zu zeigen, dass $r(k \uparrow ((r(k)+1)/2))$ ungerade ist:
Trivial: $r(k \uparrow ((r(k)+1)/2))) = l(k), l(k)$ ist ungerade.

Falls $kne \neq \lambda$:
$k \uparrow ((r(k)+1)/2) = kn_{right}kne\ kn_{anf}kn_{left}$.

Die Teilkette $kne\ kn_{anf}$ bildet ein Palindrom (die Struktur von kne ist nämlich: $kne = kn_{anf}p\ kn_{anf}p\ ...kn_{anf}\ p$), damit ist $k \uparrow ((r(k)+1)/2) \in PA$.

Bleibt zu zeigen, dass $r(k \uparrow ((r(k)+1)/2))$ ungerade ist: Analoge Behandlung wie bei Fall 1.
$k \uparrow ((r(k)+1)/2) = knee_1...knee_j$ mit
$knee_i = kn_{right}kn_{anf}kn_{left} \forall i \in \{1, ..., j\}$
Damit folgt: $r(k \uparrow ((r(k)+1)/2)) = l(knee_1)$. $l(knee_1)$ ist ungerade. q.e.d.

Lemma 5: Sei $k \in PA$ und $k \uparrow i \in PA$.
Dann gilt: $k \uparrow (2i) = k$

Beweis:
Es gilt: $\forall j \in \{1, ..., n\} : k_j = k_{n+1-j}$ (k_j bezeichne die einzelnen angeordneten Steine der Kette k).

kk sei definiert durch $kk = k \uparrow i$.
Da $kk \in PA$ gilt:
$\forall j \in \{1, ..., n\} : kk_j = kk_{n+1-j}$
Da kk durch Schieben von k um i Stellen hervorging, folgt: $kk_j = k_{j+i}$.
$k_{j+i} = k_{n+1-j+i} = k_{n+1-(j+i)+2i}$, da $kk \in PA$.
Substituiert man in obiger Gleichung $j+i$ durch j, ergibt sich:
$k_j = k_{n+1-(j)+2i}$
Durch Zusammenfassung dieser Gleichung mit der ersten folgt:
$k_{n+1-j} = k_{n+1-j+2i}$
Substituiert man wieder, jetzt $n+1-j$ durch j, folgt: $k_j = k_{j+2i}$
q.e.d.

Lemma 6: Sei $k \in EP$ und $k \uparrow i \in EP$.
Dann gilt: $k \uparrow (2i) = k$

Beweis:
es gilt: $\forall j \in \{2, ..., n\} : k_j = k_{n+2-j}$
kk sei definiert durch $kk = k \uparrow i$.
Da $kk \in EP$ gilt:
$\forall j \in \{2, ..., n\} : kk_j = kk_{n+2-j}$
Da kk durch Schieben von k hervorging, folgt: $kk_j = k_{j+i}$
$k_{j+i} = k_{n+2-j+i} = k_{n+2-(j+i)+2i}$, da $kk \in EP$.
Substituiert man in obiger Gleichung $j+i$ durch j, ergibt sich:
$k_j = k_{n+2-(j)+2i}$

Durch Zusammenfassung dieser Gleichung mit der ersten folgt:
$k_{n+2-j} = k_{n+2-j+2i}$
Substituiert man wieder, jetzt $n+2-j$ durch j, folgt: $k_j = k_{j+2i}$
q.e.d.

Satz 8:
Sei $k \in IN$.

$$f_{spi}(k) = \begin{cases} r(k)/2 & \text{wenn r(k) gerade} \\ (r(k)-1)/2 & \text{wenn r(k) ungerade und } k \in PA \\ (r(k)+1)/2 & \text{wenn r(k) ungerade und } k \in EP \end{cases}$$

Beweis: Fallunterscheidung der o.g. Fälle.
Fall 1: r(k) gerade
Folgt nach Lemmata 1 und 2.
Fall 2: r(k) ungerade und $k \in PA$
Folgt nach Lemma 3.
Fall 3: r(k) ungerade und $k \in EP$
Folgt nach Lemma 4.
q.e.d.

Satz 9: Sei $k \in IN$. Es gilt:
1. $g(k) \neq k$
2. $g(g(k)) = k$

Beweis: Fallunterscheidung nach Satz 8:
Fall 1: r(k) gerade
Nach Satz 8 gilt: $g(k) = k \uparrow f_{spi}(k) = k \uparrow r(k)/2$, $g(g(k)) = k \uparrow r(k)$.
Nach Lemmata 1 und 2 gilt die erste Behauptung.
Die zweite ergibt sich aus den Lemmata 5 und 6.
Fall 2: r(k) ungerade und $k \in PA$
Nach Satz 8 gilt: $g(k) = k \uparrow f_{spi}(k) = k \uparrow (r(k)-1)/2$, $g(g(k)) = k \uparrow (r(k))$.
Nach Lemma 3 und Lemma 0 folgt die erste Behauptung.
Die zweite Behauptung läßt sich wie folgt zeigen:
Nach Lemma 3 ist $g(k) \in EP$.
$g(g(k)) = g(k \uparrow (r(k)-1)/2)) = k \uparrow ((r(k)-1)/2 + (r(k)+1)/2) =$
$k \uparrow r(k) = k$ (Nach Def. von $r(k)$).

Fall 3: r(k) ungerade und $k \in EP$
Nach Satz 8 gilt: $g(k) = k \uparrow f_{spi}(k) = k \uparrow (r(k)+1)/2$. Nach Lemma 4 und Lemma 0 folgt die erste Behauptung.

Die zweite Behauptung läßt sich wie folgt zeigen:
Nach Lemma 4 ist $g(k) \in PA$.
$g(g(k)) = g(k \uparrow (r(k)+1)/2)) = k \uparrow ((r(k)+1)/2 + (r(k)-1)/2) =$
$k \uparrow r(k) = k$ (Nach Def. von $r(k)$).
q.e.d.

Satz 10:
Es gilt: $|SR| = |IN|/2$.

Beweis: Nach Satz 9 kann auf der Menge der Ketten aus IN eine Äquivalenzrelation gebildet werden: Seien $k_1, k_2 \in IN$ mit $k_1 \neq k_2$. Es gelte: k_1 *äquiv.* k_2, falls $k_1 = g(k_2)$.
Nach Def. von SR gilt: $|SR| = |\textit{Äquivalenzklassen in } \mathrm{IN}| = |IN|/2$.
Damit folgt die Behauptung.
q.e.d.

5.2 Formel zur Spiegelung

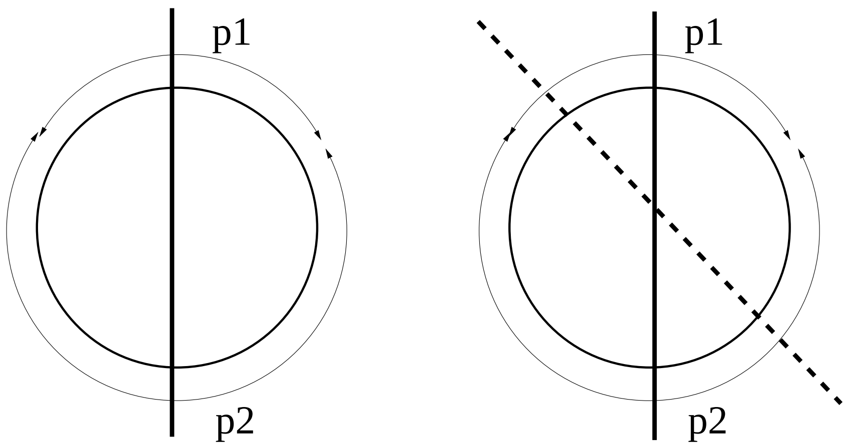

Abbildung 5.1: Illustration zu den bzgl. Spiegelung zu sich selbst inversen Ketten.

Abbildung 5.1 illustriert das anzugehende Problem bei der Spiegelung. Links ist eine Kette vor der Spiegelung skizziert, rechts die entsprechende gespiegelte Kette. Wie aus Satz 1 hervorgeht, fallen genau solche Ketten, die aus zwei Palidromen bestehen, durch Spiegelung auf sich selbst.
Dies gilt auch, wenn man die Spiegelachse - wie in Abbildung 5.1 schraffiert dargestellt - dreht. Durch Rotation der Kette kann dann wieder die in Abbildung 5.1 rechts dargestellte Situation herstellen.

Folgende Vermutung hat sich aus vielen Versuchen konkretisiert, erst danach entstand die Idee zum Beweis.

Die Anzahl der Ketten nach zusätzlicher Berücksichtigung der Spiegelung ergibt sich wie folgt:

$$Formel\ 4.1. \qquad MK_{sprot} = \quad (MK_{rot} + z)/2$$

z wird noch erklärt. Den Wert für MK_{rot} liefert Formel 3.3.

Plausibilitätsbetrachtung zur Formel: Intuitiv würde man annehmen, dass durch Spiegelung sich die Anzahl der Ketten halbiert. Es gibt aber Ketten, die bzgl. Spiegelung zu sich selbst invers sind, diese sind hier mit z berücksichtigt.

Die Anzahl der Ketten z ergibt sich wie folgt:

$$Formel\ 4.2. \qquad z = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \geq 3 \\ \frac{((n-x)/2)!}{\prod\limits_{m_i}[m_i/2]!} & \text{sonst} \end{cases}$$

mit x sei die Anzahl ungerader Farben.

Erläuterung anhand eines Beispielproblems, hier [3, 3]:
Es gilt: x= 2;
Damit folgt: z = ((6-2)/2)! / 1! 1! = 2.

Nach dieser Berechnung existieren für das Beispielproblem [3, 3] genau **zwei** zu sich selbst inverse Ketten bzgl. Rotation und Spiegelung.

Diese Ketten sind:
1 21212 und
1 12221.

5.3 Beweis zu Formel 4.2.

Nachdem Palindrome (die bereits ausgiebig untersucht wurden) als Alternative aufkamen, könnte man die Beweisidee aus der Literatur klauben!! In der Literatur (z.B. [3, 4, 5, 6, 8, 9] konnte aber nichts geeignetes gefunden werden!

Die hier vorgestellte neue Beweisidee basiert auf der Fallunterscheidung nach Anzahl der Farben ungerader Mächtigkeit (hier mit x bezeichnet).

1. $x \geq 3$
   Unproblematisch, In diesem Fall gilt: z=0. Es kann keine Ketten geben, die aus zwei Palindromen bestehen. Überlegung: Ungerade Steine MÜSSEN in der Mitte der symmetrischen Ketten angeordnet sein, bei zwei Ketten können maximal 2 Steine eingewoben werden.

2. $x = 2$
   Ebenfalls unproblematisch, es gibt zwei Grundsteine (Mittelsteine der Ketten k_1 und k_2), nämlich gerade die Steine ungerader Farben. Die weiteren Steine werden einfach in die Kette k_2 eingefüllt. Nach Satz 3 reicht es, nur solche Ketten k zu betrachen mit
   $k = k_1k_2$, $l(k_1) = 1$, k_2 Palindrom.

   Damit hat k folgende Struktur: $k = k_1k_{2anf}k_{2mitt}k_{2end}$ mit
   $l(k_1) = l(k_{2mitt}) = 1$ und $k_{2anf} = k_{2end}^{rev}$.

   Beide ungeraden Steine müssen in k_1 bzw. k_{2mitt} liegen.

   Damit reduziert sich das Problem auf die Möglichkeiten, k_{2anf} und k_{2end} zu bilden.
   Wegen $k_{2anf} = k_{2end}^{rev}$ ergibt sich nach Satz 5:
   $z = \frac{((n-2)/2)!}{\prod_{i=1}^{k}(m_i div 2)!}$

3. $x = 1$
   In diesem Fall kann jede Kette k durch Rotation in eine Kette k_{neu} überführt werden mit: k_{neu} besteht aus nur einer symmetrischen Kette. k_{neu} beinhaltet mittig einen Stein der Farbe ungerader Mächtigkeit. Nach Satz 6 folgt damit die Behauptung.

4. $x = 0$
   Nach Satz 7 gilt: $|PA| = \frac{(n/2)!}{\prod_{i=1}^{k}(m_i/2)!}$.

Nach Satz 8 gilt: $|EP| = \frac{(n/2)!}{\prod_{i=1}^{k}(m_i/2)!}$.

Nach Lemma 0 folgt: $|IN| = |PA| + |EP|$.

Nach Satz 10 folgt: $|SR| = |IN|/2 = 2 \star |PA|/2 = |PA|$.

Damit folgt: $z = |SR| = \frac{(ndiv2)!}{\prod_{i=1}^{k}(m_i div2)!}$.

q.e.d.

Kapitel 6

BEISPIELBERECHNUNG

Zu zwei Problemen, nämlich [**4, 4**] und [**6, 6**], soll jeweils einmal die Beispielberechnung durchgeführt werden.

Beispielproblem: [4, 4].

Berechnung zur Rotation

(nach Formel 3.1.)

ges(4) = 2, wg. der Kette 12121212.
ges(2) = 6, wg. der Ketten $1a1a$, mit $a \in \{122, 212, 221\}$
ges(1) = 70.

(nach Formel 3.2):

gen(4) = 2
gen(2) = 6-2 = 4
gen(1) = 70 -6 = 64

Nach Formel 3.3 ergibt sich:

$|MK_{rot}|$ = 64/8 + 4/4 + 2/2 = 8 + 1 + 1 = 10
(d.h. 10 verschiedene Ketten nach Rotation)

Berechnung zur Spiegelung

z = (8 /2)! / 2!/2! = 4 !/4 = 3! = 6

(d.h. 6 Ketten, die zu sich selbst invers sind)

Nach Formel 4.1:
$|MK_{sprot}| = (10 + 6)/2 = 8$.

ERGEBNIS: 8 unterschiedliche Ketten zum Problem [4, 4] !!!

Beispielproblem: [6, 6].

Berechnung zur Rotation

(nach Formel 3.1.)

ges(1) = 12! / 6!/6!= 12*11*10*9*8*7 / 6! = 2* 11*2*3* 7= 44* 21= 924
ges(2) = 6! / 3!/3! = 6*5*4/3! =20
ges(3) = 4! / 2 !/2! = 4*3/ 2!=6
ges(6) = 2! / 1!*1!= 2

(nach Formel 3.2)
gen(6) = ges(6) = 2
gen(2) = ges(2) - gen(6) = 20 -2 =18
gen(3) = ges(3) - gen(6) = 6 - 2 = 4
gen(1) = 924 - gen(2) - gen(3) - gen(6) = 924 -18 -4 -2 = 900

$|MK_{rot}| = 900/12 + 18/6 + 4/4 + 2/2 = 75 + 3 + 1 + 1 = 80$.
(d.h. 82 verschiedene Ketten nach Rotation)

Berechnung zur Spiegelung

z = (12 /2)! / 3!/3! = 6 !/3! /3! = 6*5*4/3! = 20
(d.h. 20 Ketten, die zu sich selbst invers sind)

Nach Formel 4.1:
$|MK_{sprot}| = (80 + 20)/2 = 50$.

ERGEBNIS: 50 unterschiedliche Ketten zum Problem [6, 6] !!!

Kapitel 7

Zusammenfassung der Formeln:

==

Ketten insgesamt:

$$Formel\ 1.2. \qquad |MK_{ges}| = \frac{(n)!}{\prod\limits_{i=1}^{k} m_i!}$$

==

Ketten mit führendem Startstein:

$$Formel\ 2.1. \qquad |MK_{sta}| = \frac{m_{Startstein} * (n-1)!}{(\prod\limits_{i=1}^{k} m_i!)}$$

==

Anzahl Ketten nach Berücksichtigung der Rotation:

Sei tt die Menge aller (auch unechten) Teiler von n. Die Gesamtmenge von Ketten, die in jeweils tt Teilketten oder mehr zerfallen, ergibt sich durch:

$$Formel\ 3.1. \qquad ges(tt) = \begin{cases} \frac{((n)/tt)!}{\prod\limits_{i=1}^{k} (m_i/tt)!} & \text{falls alle } m_i \text{ Vielfache von tt sind} \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Sei mit TT die Menge aller Teiler von n bezeichnet. Hierin sind auch 1 und n enthalten.

Sei ein $tt \in TT$ gegeben.

Mit $TTp(tt)$ ist folgende Menge von Teilern von n bezeichnet:

$TTp(tt) := \{tt * x$, für die gilt: $tt * x$ teilt n und $x > 1\}$

$$Formel\ 3.2. \quad gen(tt) = ges(tt) - (\sum_{tt2 \in TTp(tt)} gen(tt2))$$

Überlegung hierzu:
Zu einem tt ist zur Ermittlung von $gen(tt)$ von $ges(tt)$ auszugehen. Abzuziehen sind alle Ketten, die in mehr als tt identische Teilketten zerfallen können. Dies ist gerade die Summe über $tt2$.

Die Gesamtzahl der Ketten nach Berücksichtigung der Rotation ist:

$$Formel\ 3.3. \qquad |MK_{rot}| = \sum_{tt \in TT} \frac{gen(tt)}{n/tt}$$

Spezialfall für: $ggt(m_1, m_2, ..., m_k) = 1$:

$$Formel\ 3.4. \qquad |MK_{rot}| = \frac{(n-1)!}{\prod_{i=1}^{k} (m_i)!}$$

==

Anzahl der Ketten nach Berücksichtigung von Rotation und Spiegelung:

$$Formel\ 4.1. \qquad |MK_{sprot}| = \frac{(|MK_{rot}| + z)}{2}$$

mit z beschreibe die Anzahl zu sich selbst inverser Ketten bzgl. Spiegelung und Rotation.

Formel für z:

$$\textit{Formel 4.2.} \qquad z = \begin{cases} \frac{((n-x)/2)!}{\prod\limits_{m_i}[m_i/2)]!} & \text{wenn } x < 3 \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

mit: x sei die Anzahl von Farben ungerader Mächtigkeit.

Literaturverzeichnis

[1] Biggs, N.L.: Discrete Mathematics. Oxford, Clarendon Press, 1985

[2] Prasad, L., Iyengar, S.: An Asymptotic Equality for the Number of Necklaces in Shuffle-Exchange Networks. Theoretical Computer Science, Vol. 102, No. 2, pp. 355-365, 1992

[3] Kröber, K.: Palindrome, Perioden und Chaoten. Harry Deutsch Taschenbücher, Bd. 99, 1997

[4] Galil, Z.: Real-Time algorithms for String-matching and palindrome recognition. Research Report IBM, RC 5713, 1975

[5] Rankin, R., Berghel, H., Tielin, X.: Efficient generation of lexically proper palindromes. Proceedings of the 1990 ACM SIGSMALL/PC Symposium on Small Systems, New York, NY,p.151-5 , March 1990

[6] Apostolico, A., Breslauer, D., Galil, Z.: Optimal parallel algorithms for periods, palindromes and squares. Automata, Languages and Programming. 19th International Colloquium, Proceedings, Springer-Verlag, 1992. p.296-307

[7] Apostolico, A., Breslauer, D., Galil, Z.: Parallel detection of all palindromes in a string. Theoretical Computer Science (17 April 1995) Vol. 141, No. 1-2, p.163-73.

[8] Breslauer, D., Galil, Z.: Finding all periods and initial palindromes of a string in parallel. Algorithmica (Oct. 1995) Vol. 14, No. 4, p.355-66.

[9] Droubay, X., Pirillo, G.: Palindromes and Sturmian words. Theoretical Computer Science (28 July 1999) Vol. 223, No. 1-2, p.73-85.

[10] Kardar, M., Kantor, Y.: Randomly charged polymers. Proceedings Complex behaviour of glassy systems. Springer, 1997. p.385-92.

[11] Sear, R.: Theory for polymer coils with necklaces of micelles. Journal of Physics: Condensed Matter (23 Feb. 1998) Vol. 10, No. 7, p.1677-86.

[12] Ponge, D., Gottstein, G.: Necklace formation during dynamic recrystallization: mechanisms and impact on flow behavior. Acta Materialia (19 Dec. 1997) Vol. 46, No. 1, p.69-80.

[13] Hurfin, M., Raynal, M.: Detecting diamond necklaces in labeled DAGs: (a problem from distributed debugging). Graph-Theoretic Concepts in Computer Science. 22nd International Workshop, WG '96 Proceedings Springer-Verlag, 1997. p.211-23

[14] Tvrdik, P.: Necklaces and scalability of Kautz digraphs. Proceedings. Sixth IEEE Symposium on Parallel and Distributed Processing 1994. p.409-15

[15] Wang, T.M.Y., Savage, C.D.: A new algorithm for generating necklaces. Proceedings Twenty-Eighth Annual Allerton Conference on Communication, Control and Computing, Univ. Illinois, 1991. p.72-81

[16] Fredericksen, H., Maiorana, J.: Necklaces of beads in k colors and k-ary de Bruijn sequences. Discrete Mathematics (Sept. 1978) Vol. 23, No. 3, p.207-10.