

# Ein einfaches Modell sozialer Selbstorganisation

## Teil 1: Strukturodynamiken

Michael Köhler-Bußmeier

University of Applied Science Hamburg,  
Department for Informatics  
Berliner Tor 7, 20099 Hamburg

University of Hamburg,  
Department for Informatics  
Vogt-Kölln-Straße 30, 22527 Hamburg

**Zusammenfassung:** In diesem Beitrag wollen wir das von Langer und Köhler-Bußmeier beschriebene Modell sozialer Systeme formalisieren. In diesem Modell geht es um jene Mechanismen, die der Strukturdynamik sozialer Systeme zugrundeliegen – d.h. das Modell betrachtet jene Dynamiken, mit denen sich soziale Konstellation zwischen Akteuren ausbilden. Wir wollen hier speziell untersuchen, ob unser Formalismus für einige bereits empirisch betrachtete Fälle eine Dynamik aufweist, die jeweils mit der Empirie übereinstimmen.

**Schlagnworte:** Komplexe, adaptive Systeme, Netzwerke, soziale Systeme

## 1. Modell sozialer Strukturodynamiken

In diesem Beitrag wollen wir das in (Langer und Köhler-Bußmeier, 2009) beschriebene Modell sozialer Systeme formalisieren. In diesem Modell geht es um die Mechanismen, die der *Strukturdynamik* zugrundeliegen, d.h. jener Dynamik mit der sich soziale Konstellation zwischen Akteuren ausbilden.

Vereinfachend formuliert geht das Modell davon aus, dass Akteure durch ihr Verhalten immer auch das Verhalten anderer Akteure praktisch anerkennen. Anerkannt wird insbesondere, dass Akteure die Fähigkeit besitzen, sich auf Ihre Art in regelmäßiger Weise zu verhalten und diese Fähigkeit, dass sie es vermögen, wird ihnen als Vermögen zugesprochen.<sup>1</sup> Ein Akteur ist hierbei nicht mit einem Menschen gleichzusetzen; stattdessen werden Akteure in der Theorie als Praxis/Ordnungen (PO) konzeptionalisiert, d.h. als sich regelmäßig verhaltende Einheiten oder Konstellationen, denen von anderen Praxis/Ordnungen

---

<sup>1</sup>Warnung: Der Terminus birgt Potenzial für Missverständnisse, insbesondere dann, wenn man Vermögen im Sinne von „Geld“ versteht. Vermögen ist hier nichts, was man besitzt. Ein vermögender Akteur hat auch keinen Vorteil. Stattdessen ist es so, dass ein vermögender Akteur – aus Sicht der anderen – etwas *vermag*, in dem Sinne, dass seine (bzw. die zugesprochenen) Verhaltensregelmäßigkeiten in Bezug auf diesen oder jenen Aspekt besonders detailliert sind.

soziale Anerkennung zuteil wird. Auch die Form der Wechselwirkung – die praktische Anerkennung – ist nicht nur auf direkte Interaktion beschränkt; vielmehr umfasst sie jede Form der Relation, z.B. wird die Lektüre eines Schbuches als Interaktion zwischen dem Autor und dem Rezipienten angesehen. Die Wechselwirkung von Akteuren ist gleichzusetzen mit der Wechselwirkung von zwei Vermögen, d.h. von zwei Strukturen an Verhaltensregelmäßigkeiten. Diese wird in dieser Theorie dann anhand zweier Fragen kategorisiert: Erstens: In welchem Maße sind die Verhaltensregelmäßigkeiten „in der gleichen Richtung“ ausgerichtet? Dieses Maß wird als Orientierungswert beschrieben. Zweitens wie groß ist die „Regelungsdichte“? Dieses Maß ist der Vermögenswert. Für eine weitergehende Darstellung der Theorie im sozialwissenschaftlichen Kontext verweisen wir auf die Darstellung (Langer, 2005).

Die Theorie sagt für gewisse Grundkonstellationen archetypische Dynamiken voraus: Ist das Verhältnis der praktischen Anerkennungen different, so zerfällt das System in einer Dissoziierungsdynamik, da die Handlung nicht wechselseitig anerkennbar sind und daher nicht konstituierend für ein soziales Gefüge werden können. Ist das Verhältnis dagegen relationiert, so ist zu unterscheiden, inwieweit die Vermögenswerte dem Umfange nach gleichwertig sind und inwieweit sie in der Ausrichtung einander ähneln, d.h. inwieweit sie an einander orientiert sind. Gleichwertige Vermögen münden der theoretischen Analyse nach in Solidarisierung- oder in Konkurrenzdynamiken – abhängig vom dem *Orientierungswert*; ungleiche Vermögen führen zu einer Hierarchisierungsdynamik, entweder als Authorisierungs- oder als Herrschaftsdynamik (vgl. dazu folgende Tabelle).

	Vermögenswerte sind gleichwertig	... ungleich
Orientierungswert ist hoch	Solidarisierung	Authorisierung
Orientierungswert ist niedrig	Konkurrenz	Herrschaft

Die erste Frage, der wir hier nachgehen wollen, ist die nach der Beobachtbarkeit dieser Archetypen der Dynamiken. Genauer: An welchen Eigenschaften eines Systems lässt sich erkennen, dass beispielsweise eine Solidarisierungsdynamik vorliegt? Auch stellt sich die Frage, ob die Übergänge zwischen den Dynamiken fließend sind, so dass eine Dynamik sich bspw. eher als eine Solidarisierung als eine Authorisierung einstufen lässt. Mathematisch gesprochen fragen wir also nach Indikatoren bzw. Kenngrößen, die Eigenschaften der Dynamik messen und deren konkrete Werte den Archetypen zugeordnet werden können.

Die zweite Frage, die wir hier stellen, ist die nach dem Verhältnis von globalen Kenngrößen und lokaler Interaktion. In aller Regel werden die Kenngrößen, anhand derer die Dynamiken ausgewertet werden, das Netzwerk und seine Entwicklung als Ganzes erfassen. Dies ist insofern auch plausibel, denn jede der Dynamiken, z.B. eine Authorisierung, ist schon von der Natur nach eine Dynamik, die mehr als nur eine P/O betrifft; stets sind Authorisierende und Authorisierte beteiligt und die Authorisierung lässt sich nur an der Beziehung dieser

in Bezug auf einander, aber auch in Bezug auf ihre Umwelt feststellen. Jede einzelne Wechselwirkung ihrerseits folgt ist dagegen rein lokal ist, d.h. sie beziehen sich nur auf die beiden Interagierenden. Wir unterstellen, dass die Interaktionen dabei nicht rein zufällig erfolgen, sondern einer inneren Logik folgen. Wir fragen nun, wie eine solche Logik beschaffen sein könnte, dass sie die theoretische vorhergesagte, globale Dynamik erzeugen könnte.

Der dritte Aspekt, den wir hierbei berücksichtigen, ist die Tatsache, dass die theoretische Analyse idealtypische Grenzfälle heranzieht, bspw. die Dynamik untersucht, die sich aus gleich orientiertem Vermögen ergibt. Sie muss – aufgrund der qualitativen Natur – offen lassen, was passiert, wenn beispielsweise Vermögenswerte quantitativ im Grenzbereich zwischen Gleich- und Ungleichheit verteilt sind. Auch ist ohne eine genauere Modellierung kaum zu prognostizieren, welche Dynamik entstehen, wenn die Orientierungswerte in einem Teilbereichen des Systems positiv orientiert sind, dagegen für einen anderen Bereich negativ. Auch wäre die Struktur des sozialen Netzwerkes zu berücksichtigen, denn vermutlich ist ein Bereich gleich orientierter Vermögen im Zentrum des Interaktionsnetzes deutlich wirkungsmächtiger als an der Peripherie. Verschiedene andere Mischformen der Faktoren sind denkbar und wären zu analysieren.

Der folgende Beitrag soll daher klären, ob sich die theoretisch abgeleiteten Prognosen für die Grenzfälle auch experimentell nachvollziehen lassen. Wir wollen klären, wann die eine Form der Dynamik in eine andere kippt. Und wir wollen studieren, welche Rahmenbedingungen in Bezug auf die Netzwerkstruktur und die Verteilung der Vermögen in der Akteurspopulation hierbei ggf. eine Rolle spielen.

Wir definieren dazu in Abschnitt 2 ein formales Modell eines dynamischen P/O-Netzwerkes, wobei die Dynamik sich aus der Interaktion der Akteure ergibt, wobei „ähnliche“ Akteure die Vernetzung erweitern, „unähnliche“ sie dagegen abbauen. Abschnitt 3 widmet sich dann der Analyse einiger Grenzfälle, deren Dynamik sich im groben prognostizieren lässt, um herauszufinden, ob sich das Simulationsmodell zumindest für einige Spezialfälle mit der Erwartungshaltung deckt.

## 2. Modell: Dynamischer P/O-Graph

Wir gehen für die Modellierung davon aus, dass die Akteure in einem Verbindungsverhältnis der praktischen Anerkennung stehen, so dass wir den Fall der Dissoziation ausschließen können und uns direkt auf die Strukturdynamiken konzentrieren können. Diese Beziehung der Akteure modellieren wir durch einen ungerichteten Graphen  $G = (V, E)$  mit Kantenmenge  $E \subseteq V \times V$ . Die Knotenmenge  $V$  des Graphen sind die Akteure. Akteure, die durch Kanten in der Menge  $E$  verbunden sind, interagieren miteinander, d.h. sie zollen einander praktische Anerkennung. Typischerweise wird jeder Akteur nur mit einer kleinen Anzahl der Gesamtzahl verbunden sein, mache Akteure mit mehr andere mit weniger anderen.

Das Vermögen der Akteure ist in unserem Modell explizit darzustellen. Konkret müssen die Vermögen zweier Akteure zum einen vergleichbar sein (d.h. die Unterscheidung in gleichwertig-ungleichwertig unterstützen) und zum anderen

auch eine relative Orientierung aufweisen (d.h. zueinander passend-unpassend sein).

Da wir die Wertigkeit von Vermögen beschreiben wollen, müssen wir quantifizieren. Um das Vermögen orientieren zu können, stellen wir es als Richtung in einem Handlungsraum der Dimension  $n \geq 2$  dar, d.h. als (positiver) Vektor:

$$A \in (\mathbb{R}^+)^n$$

Der Absolutwert des Vermögen ist dann der Vektorbetrag  $|A|$ .

## 2.1. Vergleich der Vermögen

Das Vermögen ist als Zuschreibung relational: Die Handlungen der Akteure beziehen ihre soziale Wirksamkeit aus der Anerkennung seiner Umgebung. Anerkennung ist insbesondere von denjenigen Akteuren zu erwarten, die sich in Ihrer Orientierung aufeinander beziehen, sich aneinander orientieren.

Akteure vergleichen ihr Vermögen sowohl relativ als auch absolut. Der relative Vergleich der Vermögen fragt, inwieweit die Vermögen in ihrer Orientierung gleichgerichtet sind, was wir als den *Orientierungswert* der Vermögen bezeichnen; der absolute Vergleich setzt – insbesondere bei ähnlich orientierten Vermögen – die Vermögenswerte zueinander in Beziehung.

Wir quantifizieren den *Orientierungswert* durch den Grad der Gleichgerichtetheit der Handlungen; mathematisch wird dies mittels des Skalarprodukts ausgedrückt:<sup>2</sup>

$$OW_{A,B} = \frac{A \cdot B}{|A| \cdot |B|} \quad (1)$$

Da die beiden Vermögen Vektoren über  $\mathbb{R}^+$  sind, d.h. im im positiven Bereich sind, ist der Orientierungswert eine positive Größe. Wegen der Normierung liegt er zwischen 0 und 1, d.h. der Betrag der Handlungsorientierung spielt hierbei zunächst keine Rolle. Bei komplett gleicher Orientierung der Vermögen wird dieser Wert seinen maximalen Wert von 1 erreichen; bei komplett gegensätzlichen (d.h. orthogonalen) Vermögen wird er minimal (hier: 0).

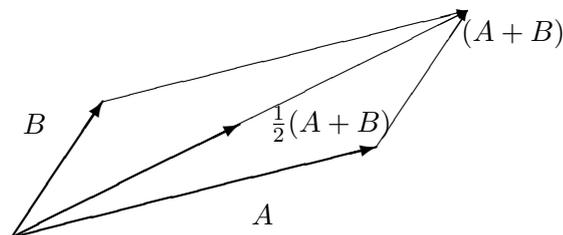


Abbildung 1: Projektion

Weiterhin vergleichen Akteure  $A$  und  $B$  die Absolutwerte ihrer Handlungsorientierung. Wir modellieren dies, indem wir berechnen, inwieweit das jeweilige

<sup>2</sup>Der Orientierungswert ist also geometrisch betrachtet mit dem Winkel zwischen den beiden Vermögen gleichgesetzt.

Vermögen der beiden auf das Mittel  $\frac{1}{2}(A + B)$  der beiden bezogen ist (vgl. Abb. 1). Dabei betrachtet der Akteur  $A$  sein Vermögen in Projektion auf den Mittelwert:

$$V_A(A, B) := A \cdot \frac{1}{2}(A + B) \quad (2)$$

Analog betrachtet  $B$  sein Projektion, d.h.  $V_B(A, B) := B \cdot \frac{1}{2}(A + B)$ .

## 2.2. Zentraler lokaler Mechanismus: Belohnung orientierungssicherer Akteure

Das Verhältnis der Orientierungswerte erzeugt jetzt auf dem Netzwerk eine Dynamik. Dynamisch ist dabei die Topologie, d.h. die Kanten verändern sich, während die Knoten sich nicht ändern.

Konkreter: Haben zwei Akteure einen hohen Orientierungswert, d.h. wenn  $OW_{A,B} \approx 1$  gilt, dann verstärken sich die Beziehungen zwischen den Akteuren, bzw. es bauen sich neue auf; bei einem niedrigen Orientierungswert, d.h. bei  $OW_{A,B} \approx 0$ , bauen diese sich dagegen eher ab, bzw. entfallen ganz.

Ein Beziehungsaufbau ist dabei der lokale Ausdruck der Solidarisierungs- bzw. der Authorisierungsdynamik, wobei der konkrete Typus vom Verhältnis der Vermögenswerte ist. Ein Abbau der Beziehungen ist analog der lokale Ausdruck von Dynamiken der Konkurrenz bzw. der Herrschaft, ebenfalls abhängig vom Verhältnis der Vermögenswerte.

Wichtig ist dabei, dass wir diesen Mechanismus im Modell *lokal* anlegen, d.h. zwischen den beiden beteiligten Akteuren. Offene Forschungsfrage bleibt dagegen, ob und wie sich diese lokalen Aktivitäten auf globaler Ebene als aggregierter Effekt äußern, den wir als Strukturdynamik begreifen können. Wäre dem nicht so, dann würde unser Modell ja trivialerweise Prognosen in Übereinstimmung mit der theoretischen Analyse liefern.

Der Erklärungswert entsteht dadurch, dass wir – im besten Falle – makroskopische Dynamiken auf mikroskopische Interaktionen zurückführen können. Ob und unter welchen Randbedingungen dies gelingen mag, ist zunächst offen.

### 2.2.1. Kantenerzeugung

Wird eine Verbindung aufgebaut, dann war der Orientierungswert höchstwahrscheinlich eher groß, d.h.  $OW_{A,B} \approx 1$ . Bei einer solchen Konstellation profitieren beide Akteure, da sie erwartungssicherer werden. Jedoch zieht der vermögendere Akteur anteilig einen größeren Profit aus dieser Übereinstimmung. Wir beschränken uns daher darauf, nur dem größeren Profiteur anzupassen. Diesen bestimmen wir anhand eines Vergleichs der absoluten Vermögenswerte  $V_A$  und  $V_B$ . Die Erwartungssicherheit drückt sich in diesem Modell durch eine Verstärkung der Vernetzung aus: Orientierungssichere Akteure vernetzen sich weiter, d.h. es werden Kanten hinzugefügt. Wenn  $A$  der vermögendere Akteur ist, dann baut also  $A$  eine neue Verbindung auf und zwar in diesem Modell zu einem Nachbarn von  $B$ , d.h.  $A$  bekommt Kraft seines Vermögens, das  $B$  anerkennt, auch Zugang zu dem Umfeld von  $B$ . Es ergeben sich drei typische Konstellationen:

- $V_A \gg V_B$ :  $A$  besitzt das deutlich größere Vermögen. In diesem Fall profitiert der vermögensstärkere  $A$  deutlich mehr als  $B$ .

Wir modellieren dies, indem ausschließlich  $A$  sein Netzwerk vergrößert: Hier wird  $A$  mit einem zufällig ausgewählten Nachbarn  $C$  von  $B$  verbunden.

Sollte die Kante vorher nicht existiert haben, so entspricht dies dem bekannten „triadic closure“ aus Sicht von  $A$ .

- $V_A \ll V_B$ : Wie zuvor, nur mit vertauschten Rollen, d.h.  $B$  ist der vermögendere Akteur.
- $V_A \approx V_B$ : In diesem Fall sind beide Akteure gleich vermögend und sie ziehen einen ähnlichen Gewinn aus der Orientierungssicherheit.

Im Modell wird mit gleicher Wahrscheinlichkeit einer der beiden Agenten als der profitierende Akteur gewählt.

Wir können diese drei Fälle vereinheitlicht durch einen Zufallsprozess modellieren, bei dem  $A$  mit einer Wahrscheinlichkeit Profiteur des Vermögensvergleichs wird, die proportional zu seinem Anteil am Gesamtvermögen  $V_A + V_B$  ist:

1. Generiere einen Zufallswert  $z_V \in [0, V_A + V_B]$ .
2. Liegt  $z_V \in [0, V_A)$ , so wählen wir  $(X, Y) = (A, B)$ ;  
liegt  $z_V \in [V_A, V_A + V_B]$ , so wählen wir  $(X, Y) = (B, A)$ .  
Resultat: Jetzt ist  $X$  – mit großer Wahrscheinlichkeit – vermögender als  $Y$ , wobei die Wahrscheinlichkeit umso größer ist, je eindeutiger das Verhältnis der Vermögen ist.
3. Wähle zufällig eine Nachbarn  $Z$  von  $Y$ , d.h.  $Z \in Y^\bullet$ .
4. Existiert die Kante  $X \rightarrow Z$  nicht, so füge diese hinzu; andernfalls tue nichts.<sup>3</sup>

Dieser Mechanismus modelliert das gewünschte Verhalten: Gilt  $V_A \gg V_B$ , so wird – mit hoher Wahrscheinlichkeit –  $A$  als der vermögendere Akteur, derjenige sein, der eine weitere Verbindung aufbaut; gilt  $V_A \ll V_B$ , so wird es mit hoher Wahrscheinlichkeit  $B$  sein; für  $V_A \approx V_B$  wird  $q_A := \frac{V_A}{V_A + V_B} \approx \frac{1}{2}$ , d.h. in diesem Fall sind beide Varianten gleich wahrscheinlich.

### 2.2.2. Kantenlöschung

Wird eine Verbindung gelöscht, dann war der Orientierungswert höchstwahrscheinlich eher klein, d.h.  $OW_{A,B} \approx 0$ . Ein kleiner Orientierungswert bedeutet, dass die Akteure einander wenig Erwartungssicherheit bieten. Akteure sind desorientiert. Ihre Vernetzung schwächt sich ab.

<sup>3</sup>Alternativ könnten wir die Kanten mit einem Gewicht ausstatten, das mitzählt, wie oft die Kante erneut erzeugt wurde. Das Gewicht würde dann die Wahrscheinlichkeit einer Kante, ausgewählt zu werden, entsprechend erhöhen.

Besitzt  $A$  ein deutlich größeres Vermögen als  $B$ , dann ist  $A$  in seinen Verhalten sicherer, so dass seine Verbindung zu  $B$  bzw. zu dem Umfeld von  $B$  weniger wichtig ist. Also wird im Zweifel die Vernetzung von  $A$  in Richtung auf das Netzwerk um  $B$  herum abgeschwächt. Dies geschieht konkret durch das Löschen einer Kante aus der Nachbarschaft von  $B$ .<sup>4</sup> Welche Verbindung konkret gelöscht wird, soll dabei ganz analog zum Aufbau vom Vergleich der absoluten Vermögenswerte  $V_A$  und  $V_B$  abhängen:

- $V_A \gg V_B$ : Es wird ein Nachbar  $C$  des schwächeren Partners, d.h. von  $B$  ausgewählt.  
Existiert die  $A \rightarrow C$  Kante, so wird diese gelöscht, andernfalls geschieht nichts.<sup>5</sup>
- $V_A \ll V_B$ : Wie zuvor, nur mit vertauschten Rollen.
- $V_A \approx V_B$ : In diesem Fall sind beide Akteure gleichwahrscheinlich.

Wir können diese Fälle – analog zur Erzeugung – uniform durch einen Zufallereignis abbilden. Im Unterschied zur Erzeugung wird hier die Kante  $X \rightarrow Z$  gelöscht und nicht erzeugt. Der Lösch-Prozess unterscheidet sich nur im letzten Schritt von dem der Kantenerzeugung; die Auswahllogik ist dagegen gleich.

### 2.3. Dynamik: Pseudocode

Wir können die Kantenmodifikation einer vereinheitlichten Form zusammenfassen, indem wir zunächst das Verhältnis der Vermögen  $V_A$  und  $V_B$  bestimmen und damit entscheiden, wen wir als den dominanteren Akteur  $X$  ansehen wollen. Anschließend bestimmen wir einen Nachbarn  $Z$  von  $Y$ . Erst dann entscheiden wir anhand des Orientierungswerts, ob wir Kanten einfügen oder löschen werden.

Ob eine Kante erzeugt oder gelöscht wird, bestimmt sich im Modell stochastisch: Mit der Wahrscheinlichkeit  $OW_{A,B}$  wird eine Kante erzeugt und mit  $(1 - OW_{A,B})$  eine Kante gelöscht. Als Konsequenz führt ein hoher Orientierungswert (d.h. für  $OW_{A,B} \approx 1$ ) höchstwahrscheinlich zu einer neuen Kante. Analog wird für sehr niedrige Orientierungswerte  $OW_{A,B} \approx 0$  höchstwahrscheinlich eine Kante gelöscht.

Wir modellieren diesen Auswahl im Algorithmus konkret durch einen Zufallswert  $z_{OW}$  zwischen 0 und 1; liegt  $z_{OW}$  im Intervall  $[0, OW_{A,B})$ , dann wird eine Kante erzeugt; liegt  $z_{OW}$  dagegen im Intervall  $[OW_{A,B}, 1]$ , dann wird eine Kante gelöscht.

Insgesamt ergibt sich der Ablauf, der das Netzwerk modifiziert, wie in Abbildung 2.

---

<sup>4</sup>Als Konsequenz erhöht sich dadurch aus Sicht von  $A$  die anteilige Relevanz der Verbindung von  $A$  nach  $B$  noch weiter, da  $A$  jetzt einen Nachbarn weniger besitzt. Das heißt, dass die Verbindung von  $A$  nach  $B$  immer stärker zu einer Brücke zwischen der Umgebung von  $A$  auf der einen Seite und der von  $B$  auf der anderen wird.

<sup>5</sup>Alternativ könnte das Gewicht verringert werden.

- 
1. Wähle eine beliebige Kante  $A \rightarrow B$  des Netzwerkes für eine Interaktion.
  2. Generiere einen Zufallswert  $z_V \in [0, V_A + V_B)$ .
  3. Bestimme unter  $A$  und  $B$  den profitierenden Akteur  $X$ :

$$(X, Y) = \begin{cases} (A, B), & z_V \in [0, V_A) \\ (B, A), & z_V \in [V_A, V_A + V_B) \end{cases}$$

$X$  ist also (wahrscheinlich) vermögender als  $Y$ .

4. Wähle zufällig<sup>6</sup> eine Nachbarn  $Z$  von  $Y$ , d.h. ein Element aus  $Y^\bullet$ .
  5. Bestimme einen Zufallswert  $z_{OW}$  zwischen 0 und 1.
    - a) Liegt  $z_{OW}$  im Intervall  $[0, OW_{A,B})$ , dann wird die Kante  $X \rightarrow Z$  hinzugefügt (sofern sie noch nicht existiert; andernfalls passiert nichts).
    - b) Liegt  $z_{OW}$  dagegen im Intervall  $[OW_{A,B}, 1]$ , dann wird die Kante  $X \rightarrow Z$  gelöscht (sofern sie existiert; andernfalls passiert nichts).
  6. Beginne von vorn.
- 

Abbildung 2: Pseudo Code

### 3. Analyse von Grenzfällen

Das Modell besitzt zwei primäre Freiheitsgrade: Zum einen die Verteilung der Vermögen auf die Knoten und zum anderen die Topologie des Netzwerkes.

Zentrale Kenngröße in Bezug auf die Vermögen soll der *mittlere Orientierungswert* eines Graphen  $(V, E)$  sein:

$$\langle OW \rangle = \frac{1}{|E|} \cdot \sum_{(A,B) \in E} OW_{A,B}$$

Zentrale Kenngröße für die Topologie ist neben der Dichte (d.h. der Anteil realisierter Kanten an allen möglichen Kanten):

$$density(G) = \frac{|E|}{\frac{1}{2} \cdot |V| \cdot (|V| - 1)}$$

insbesondere die Transitivität, die angibt, wie stark der Graph lokal vernetzt ist:

$$transitivity(G) = \frac{|\{(A, B, C) \mid A, B \text{ und } C \text{ sind verbunden}\}|}{|\text{Alle 3-elementigen Knotenmengen}|}$$

Wir betrachten im folgenden einige Grenzfälle, für die wir die Dynamik prognostizieren können.

#### 3.1. Dynamiken bei hohem Orientierungswert

Im folgenden untersuchen wir  $rnd\_graph\_rnd\_val(n, m, p)$  Netzwerke. In diese Klasse gehören Graphen mit  $n$  Akteuren, die mit  $m$  zufällig platzierten Kanten verbunden werden. Jeder Akteur hat dabei mit der Wahrscheinlichkeit  $p$  das Vermögen  $A = (1, 0)^\top$  (im folgenden „Ost“ genannt) und mit der Wahrscheinlichkeit  $1 - p$  das Vermögen  $A = (0, 1)^\top$  (im folgenden: „Nord“). Es sind also nur zwei Vermögen möglich, die entweder gleich oder zueinander orthogonal sind.

Als Konsequenz ist nur  $OW_{A,B} = 1$  (falls  $A$  und  $B$  gleich orientiert sind) oder  $OW_{A,B} = 0$  möglich (falls sie orthogonal sind). Im ersten Fall folgt  $V_A(A, B) = V_B(A, B) = A \cdot \frac{1}{2}(A + B) = A \cdot A = 1$ . Im zweiten Fall dürfen wir  $A = (1, 0)^\top$   $B = (0, 1)^\top$  annehmen (der umgekehrte Fall ist analog). Dann folgt  $V_A(A, B) = A \cdot \frac{1}{2}(A + B) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} = 0.5$  und  $V_B(A, B) = B \cdot \frac{1}{2}(A + B) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} = 0.5$ .

##### 3.1.1. Homogene Verteilung der Vermögen

Betrachten wir den Grenzfall, dass alle Akteure die gleiche Orientierung ihrer Handlungslogik aufweisen und dass diese zudem betragsgleich sind.

In diesem Fall ist der Orientierungswert stets 1, so dass mit Sicherheit eine Kante hinzugefügt wird. Beide Akteure haben hierbei die gleiche Wahrscheinlichkeit, von einer neuen Kante zu profitieren, da ihre Vermögen betragsgleich sind:

Dies können wir durch einen  $rnd\_graph\_rnd\_val(n, m, p)$  Graphen untersuchen, der die Wahrscheinlichkeit  $p = 1.0$  besitzt, denn dann haben alle Akteure

das gleiche Vermögen, nämlich  $(1, 0)^\top$ , und zwischen zwei Akteuren  $A$  und  $B$  ist der Orientierungswert stets  $OW_{A,B} = 1$  und  $V_A(A, B) = V_B(A, B) = 1$ .

Also wird mit gleicher Wahrscheinlichkeit jeder der beiden Akteure als der vermögendere  $X$  ausgewählt und mit absoluter Sicherheit wird eine Kante hinzugefügt. Der Ablauf vereinfacht sich also wie folgt:

1. Wähle eine beliebige Kante  $A \rightarrow B$ .
2. Wähle mit gleicher Wahrscheinlichkeit unter  $A$  und  $B$  einen aus, der als  $X$  bezeichnet wird.  $Y$  bezeichnet dann den jeweils anderen.
3. Wähle zufällig eine Nachbarn  $Z$  von  $Y$  aus, d.h. ein Element aus  $Y^\bullet$ .
4. Dreiecksschließung: Füge die Kante  $X \rightarrow Z$  hinzu (sofern sie noch nicht existiert; andernfalls passiert nichts).
5. Beginne von vorn.

Dieser Prozess stellt offensichtlich die Reinform einer *Solidarisierungsdynamik* dar, denn im Grenzwert ergibt sich stets der vollständig vermaschte Graph<sup>7</sup>

**Beispiel** Simulieren wir die Dynamik auf einem `rnd_graph_rnd_val(40,200, p)` Graphen für  $p = 1.0$  über  $t = 1000$  Runden, so erhalten wir einen Graphen, dessen mittlerer Orientierungswert über die Zeit konstant bei  $\langle OW \rangle = 1$  bleibt, denn alle Akteure sind gleich orientiert. In jedem Schritt wird versucht, eine Kante hinzuzufügen. Da bei fortgeschrittener Simulation bereits viele Kanten hinzugefügt wurden, sinkt somit die Wahrscheinlichkeit, eine noch nicht vorhandene Kante hinzuzufügen, d.h. das Tempo, mit dem Kanten hinzugefügt wird, nimmt ab, bleibt aber positiv.

Wir können dieses Verhalten im wesentlichen auch dann erwarten, wenn die Übereinstimmung nur annähernd gleich ist. Um dies zu untersuchen, betrachten einen `rnd_graph_rnd_val(40,200, p)` Graphen für  $p \approx 1$ .

Wir simulieren daher einen `rnd_graph_rnd_val(40,200, p)` Graphen jetzt für  $p = 0.9$ , d.h. im Mittel sind etwa 90% aller Akteure mit Vermögen gleicher Orientierung ausgestattet, während die restlichen 10% dazu orthogonal orientiert sind. Abbildung 3 zeigt den Verlauf einiger Kenngrößen über die Simulationszeit von 1000 Schritten.<sup>8</sup> Da nun, wenn auch mit kleiner Wahrscheinlichkeit, zwei gegensätzliche Akteure aufeinander treffen, werden auch Kanten gelöscht.<sup>9</sup> In dieser Simulation waren etwa 88% der Kantenmodifikationen Einfügeversuche und etwa 12% Lösversuche. Der mittlere Orientierungswert startet bei  $\langle OW \rangle = 0.925$  (also knapp unter 1) und nimmt – im langfristigen Trend betrachtet – über die Zeit zu.

<sup>7</sup>Vorausgesetzt, dass genügend Kanten vorhanden sind, so dass diese Dreiecksschließung den ganzen Graphen erreichen kann.

<sup>8</sup>Da sowohl der Startzustand als auch die Dynamik auf Zufallsereignissen basiert, ist dieses sowie alle folgende Beispiele und ihre Auswertungen stets nur exemplarischer Natur. Wir haben darauf geachtet, nur solche Darstellungen zu präsentieren, die sich als repräsentativ für eine große Anzahl von Durchführungen des gleichen Experiments waren. Eine weitergehendere statistische Analyse bleibt aber folgenden Untersuchungen vorbehalten.

<sup>9</sup>Die Wahrscheinlichkeit für Kantenlöschung beträgt etwa  $p(1-p) + (1-p)p = (0.9 * 0.1 + 0.1 * 0.9) = 0.018 \approx 2\%$ .

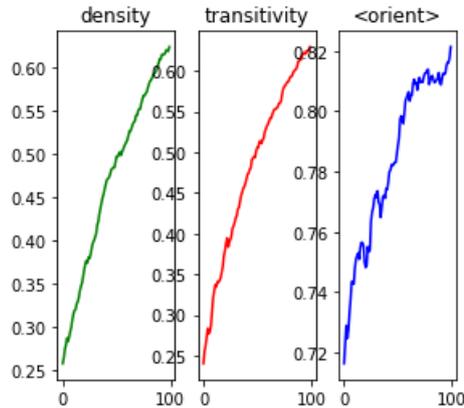


Abbildung 3: Kenngrößenverlauf eines zufälligen Graphen mit  $p = 0.9$

### 3.1.2. Ein dominanter Akteur unter orientierungsgleichen Akteuren

Betrachten wir den Grenzfall, dass alle Akteure (wie zuvor) die gleiche Orientierung ihrer Handlungslogik aufweisen, dass aber ein Akteur  $D$  einen viel größeren Vermögensbetrag besitzt, während die Vermögen aller übrigen Akteure betragsgleich sind. In diesem Fall ist der Orientierungswert stets 1, so dass mit Sicherheit eine Kante hinzugefügt wird.

Wenn in einem Simulationsschritt eine Kante zwischen zwei Akteuren betrachtet wird, von denen keiner  $D$  ist, dann profitieren wieder beide mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Ist dagegen  $D$  beteiligt, so dominiert dieser den Vergleich, d.h.  $D$  wird immer der Verbindung aufbauende Akteur sein. Da  $D$  praktisch aus jedem Vergleich als „Gewinner“ hervorgeht, steigt sein Grad sicherer und damit schneller an als die der anderen Knoten. Da ein höherer Grad auch einhergeht mit einer größeren Wahrscheinlichkeit in einer Folgerunde bei der Kantenauswahl beteiligt zu sein, ergibt sich ein selbst verstärkender Prozess.

Um die steigende Dominanz von  $D$  in der Simulation quantitativ erfassen zu können, messen wir, wie sich der Grad des dominanten Akteurs  $D$  im Verhältnis zum mittleren Grad  $\langle deg \rangle$  aller Knoten entwickelt. Dies ist der normierte Grad von  $D$ :

$$deg_N(D) := \frac{deg(D)}{\langle deg \rangle} \quad \text{mit} \quad \langle deg \rangle = \frac{1}{|V|} \cdot \sum_{A \in V} deg(A)$$

Da zu erwarten ist, dass der dominante Akteur schneller als die anderen Knoten neue Verbindungen schafft, so ist zu erwarten, dass  $deg_N(D)$  größer als 1 ist.

Dieser Prozess stellt eine Form der *Authorisierungsdynamik* dar, denn der der Akteure mit großem Vermögen wird sich schneller als die anderen Akteure vernetzen können und somit eine größere Reichweite haben.

**Beispiel** Wir simulieren die Entwicklung auf einem `rnd_graph_rnd_val(40,200, p)` Graphen für  $p = 0.9$ . Ein beliebiger Knoten wird als  $D$  ausgewählt, wobei das Vermögen des dominanten Knoten  $D$  um den Faktor 100 vergrößert wurde.

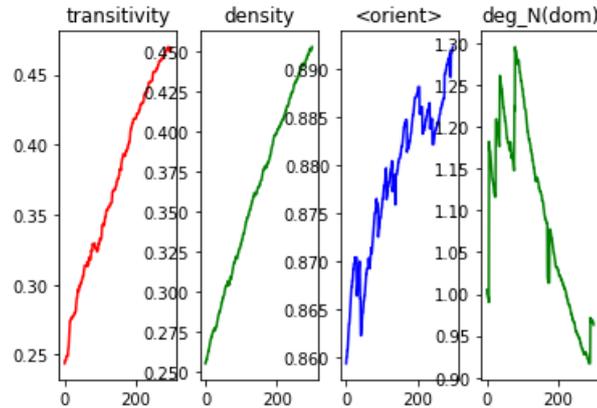


Abbildung 4: Ein zufälliges Netzwerk mit einem dominanten Akteur

Abbildung 4 zeigt den Verlauf der Kenngrößen. Der mittlere Orientierungswert steigt wie zuvor an. Auch werden i.w. Kanten hinzugefügt und nur wenige gelöscht. Auch sieht man, dass der normierte Grad  $deg_N(D)$  zu Beginn deutlich über 1 liegt, im weiteren Verlauf aber wieder auf niedrigere Werte zurückfällt, was auf ein Sättigung schließen lässt: Akteur  $D$  hat nach der ersten Hälfte seine Umgebung vollständig erschlossen und kann seinen Vernetzungsgrad nicht mehr steigern, so dass auf lange Sicht die anderen Akteure wieder aufholen werden.

### 3.1.3. Ein sternförmiges Netzwerk

Wir nehmen nun einen anderen Blickwinkel auf das Thema *Dominanz* ein. Wir betrachten dazu einen Stern als Netzwerk, d.h. einen Graphen mit einem Knoten in der Mitte, der mit allen weiteren Knoten verbunden ist. Dies beschreibt einen topologisch extrem dominanten Akteur, der im Zentrum aller Interaktionen sitzt, während die Peripherie gar nicht miteinander interagiert.

In diesem Szenario dominiert den zentrale Akteur nicht durch sein Vermögen, denn das ist für alle vom Betrag her gleich. Wir wählen für den Knoten im Zentrum (ohne Einschränkung der Allgemeinheit) das Vermögen  $(1, 0)^\top$ . Alle weiteren Knoten haben dann mit Wahrscheinlichkeit  $p$  ebenfalls dieses Vermögen und mit der Gegenwahrscheinlichkeit  $1 - p$  das orthogonale Vermögen  $(0, 1)^\top$ .

Wählen wir zu Beginn eine Kante aus, so haben dann mit der Wahrscheinlichkeit  $p$  beide die gleiche Orientierung, so dass mit Wahrscheinlichkeit  $p$  auch eine neue Kante erzeugt wird. Hierbei muss das Zentrum als Knoten  $Y$  ausgewählt werden, da zu Beginn nur das Zentrum Nachbarn  $Z \in Y^\bullet$  hat.<sup>10</sup> Daher wird eine neue Kante  $X \rightarrow Z$  zwischen zwei peripheren Knoten erzeugt. Die Wahrscheinlichkeit, dass der dritte Knoten  $Z$  wieder die gleiche Orientierung besitzt, beträgt wiederum  $p$ .

Für ein  $p \approx 1$  führt dies zu einem Graphen, dessen mittlerer Orientierungswert steigt. Konkretes Zahlenbeispiel: Bei  $p = 0.9$  folgt, dass mit der Wahrscheinlichkeit  $p \cdot p + (1 - p) \cdot (1 - p) = 0.82$  eine Kante zwischen gleich orientierten Akteuren

<sup>10</sup>Würde das Zentrum als Knoten  $X$  ausgewählt, dann müsste ein Nachbar des peripheren Knoten ausgewählt werden, der aber nicht existiert.

erzeugt wird und mit der Wahrscheinlichkeit  $2 \cdot p \cdot (1 - p) = 0.18$  zwischen orthogonal orientierten Akteuren. Die Wahrscheinlichkeit verschiebt sich im Laufe der Simulation weiter in Richtung Erzeugung gleich orientierter Akteure.

Dieser Prozess stellt eine Form der *Solidarisierungsdynamik* dar, bei dem das Netzwerk weitere Verbindungen aufbaut.

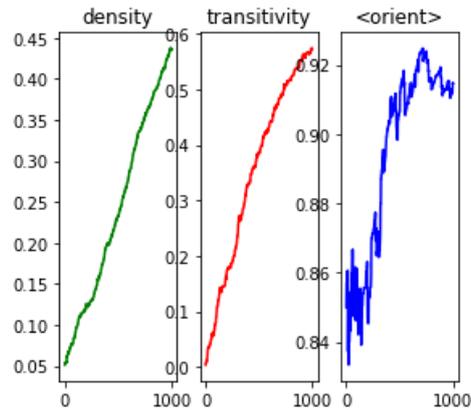


Abbildung 5: Ein sternförmiger Graph mit  $p = 0.9$

**Beispiel** Abbildung 5 zeigt den Verlauf der Simulation auf einem sternförmigen Graphen mit 40 Knoten, die mit einer Wahrscheinlichkeit  $p = 0.9$  die gleiche Orientierung wie das Zentrum aufweisen.

Ein weiteres Zahlenbeispiel: Die neutralste Variante entsteht bei  $p = 0.5$ . Bei  $p = 0.5$  folgt, dass mit Wahrscheinlichkeit  $p \cdot p + (1 - p) \cdot (1 - p) = 0.5$  die Kante zwischen gleich orientierten Akteuren erzeugt wird und mit Wahrscheinlichkeit  $2 \cdot p \cdot (1 - p) = 0.5$  zwischen orthogonalen Akteuren – d.h. beide Varianten sind zu Beginn gleich wahrscheinlich. Es werden also gleichermaßen zwischen ähnlichen Akteuren und unterschiedlichen Akteuren Verbindungen geschaffen. Hier ist also keine spezifische Entwicklung in eine bestimmte Richtung zu erwarten. Stattdessen sollte die Dynamik stark vom Zufall der ersten Aktionen beeinflusst werden.

### 3.2. Dynamiken bei geringem Orientierungswert

Bislang haben wir Strukturen betrachtet, deren Akteure ein Vermögen besaßen, das insgesamt sehr homogen orientiert war. Aus diesem Grunde besaßen die Dynamiken allesamt einen Kanten aufbauenden Charakter. Die Dynamik des mittleren Orientierungswertes konnte nicht sehr groß sein, da bereits von einem hohen Niveau aus gestartet wurde. Betrachten wir im folgenden nun Verteilungen von Vermögensorientierungen, die weitaus inhomogener sind, so dass im einzelnen sowohl mit Erzeugungen wie auch Löschung von Kanten zu rechnen ist. In einzelnen „Inseln“ des Netzwerkes könnte Vermögen nämlich eher homogen verteilt sein, so dass es dort lokal zu Kantenerzeugungen kommt, während es in den Bereichen zwischen den Inseln zu Löschungen kommt. Wir müssen also mit Strukturauf- und abbau gleichermaßen rechnen, der im einzelnen stark von

der initialen Bezug von Topologie und Vermögensorientungsverteilung abhängig ist.

Es ist nicht einfach zu prognostizieren, ob durch diese Dynamik der mittlere Orientierungswert eher steigt oder eher sinkt. Man kann damit rechnen, dass die Dynamik bevorzugt Kanten zwischen ähnlichen Akteuren hinzufügt und zwischen unähnlichen entfernt, so dass generell der mittlere Orientierungswert eher steigen sollte. Dies gilt aber nicht mehr länger, wenn die Kanten zwischen ähnlichen Akteuren schon fast alle vorhanden sind, während die anderen fast sämtlich fehlen, denn dann bleibt als einzige Möglichkeit nur die Erzeugung zwischen unähnlichen Akteuren übrig, wodurch der Orientierungswert sinkt.<sup>11</sup> Wir schließen aus dieser Tatsache, dass der mittlere Orientierungswert für Dynamiken, die Löschen und Erzeugen kombinieren, als Kenngröße nur bedingt aussagekräftig ist, da er über alle Inseln hinweg mittelt und so die topologische Dynamik völlig außer acht lässt. Auch die Dichte eines Graphen liefert diese Informatik, da die Dichte zwar die Topologie betrachtet, deren Bezug zu Orientierungsverteilung aber komplett ignoriert. Wir benötigen daher eine Größe, die beide Aspekte – Topologie und Verteilung der Vermögensorientierungen – berücksichtigt.

Wir wollen daher eine Kenngröße angeben, die die Dichte in allen Bereichen des Graphen angibt, in denen die Knoten eine ähnliche Orientierung aufweisen, d.h. deren Orientierungswert eher bei 1 liegt. Wir haben bislang nur zwei Vermögensorientierungen generiert:  $Ost = (1, 0)^\top$  und  $Nord = (0, 1)^\top$ . Es bietet sich also an, jene Knoten zusammenzufassen, die jeweils einem der beiden gleichen. Wir können dies verallgemeinern, indem wir nicht mehr fordern, dass Knoten genau einer dieser beiden Typen sein müssen; stattdessen können wir messen, ob ein Knoten in seiner Orientierung dichter bei  $Ost$  oder bei  $Nord$  liegt. Konkret filtern wir alle Knoten  $A$  heraus, die zu einer Referenzorientierung  $R$  mindestens die Ähnlichkeit  $\tau \in [0, 1]$  besitzen, d.h. konkret muss  $OW_{A,R} \geq \tau$  gelten:

$$V^{\geq\tau}(R) := \{A \in V \mid OW_{A,R} \geq \tau\} \quad (3)$$

So beschreibt für  $\tau = \sqrt{\frac{1}{2}}$  die Menge  $V^{\geq\tau}(Ost)$  genau die Menge aller Orientierungen, die zwischen der Hauptdiagonalen und Ost liegt.<sup>12</sup> Wir definieren daher zwei Teilmengen der Knoten: die eine enthält alle Knoten, die eher in Ost-Richtung liegen, und die andere enthält alle Knoten, die eher in Nord-Richtung liegen, wobei Knoten auf der Trennlinie (d.h. mit einer Orientierung entlang Hauptdiagonalen  $(1, 1)^\top$ ) in beide Mengen fallen:<sup>13</sup>

$$EAST := V^{\geq\tau}(Ost) \quad \text{und} \quad NORTH := V^{\geq\tau}(Nord) \quad \text{für} \quad \tau = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

<sup>11</sup>Dies kann man als Artefakt des Modells ansehen, das beim Versuch, bereits existente Kanten hinzufügen (bzw. nicht existente zu löschen), gar keine Aktion vornimmt. Wir könnten dies kompensieren, indem wir die Kanten mit einem Gewicht ausstatten, das mitzählt wie oft bereits die Kante erzeugt und gelöscht wurde.

<sup>12</sup>Der auf den Betrag 1 normierte Vektor der Hauptdiagonalen ist  $(\sqrt{0.5}, \sqrt{0.5})^\top$ . Der Orientierungswert zwischen Ost und der Diagonalen beträgt somit  $(1, 0)^\top \cdot (\sqrt{0.5}, \sqrt{0.5})^\top = \sqrt{0.5}$ .

<sup>13</sup>Varianten sind denkbar, bei denen der Trennwert  $\tau$  größer als  $\sqrt{0.5}$  gesetzt wird, um Knoten, die zu nah im Grenzbereich liegen komplett auszuschließen.

Wir schränken nun das Netzwerk auf Knoten dieser beiden Teilmengen ein. Für jeden Graphen  $G = (V, E)$  und jede Teilmenge  $U \subseteq V$  der Knoten beschreibt

$$G|U := (U, E \cap (U \times U))$$

die Einschränkung von  $G$  auf  $U$ , bei der alle Knoten, die nicht in  $U$  liegen, zusammen mit allen anliegenden Kanten entfernt wurden.

Damit definieren eine Kenngröße, die die Dichte nur in Bezug auf ähnlich orientierte Knoten misst:

$$density_{E/N}(G) := \frac{density(G|EAST)}{density(G|NORTH)} \quad (5)$$

Verdichtet sich also der Graph in den Bereichen, die eine Orientierung ähnlich wie *Ost* besitzen, schneller als in Bereichen, die eine Orientierung ähnlich wie *Nord* besitzen, so ist  $density_{E/N}(G) > 1$ . Gleiches gilt natürlich auch, wenn *Ost* langsamer schrumpft als *Nord*. Andernfalls liegt der Wert unter 1.

Diese Kenngröße misst also in einem gewissen Sinne, ob sich *Ost* im Verhältnis zu *Nord* besser vernetzt, wobei man plakativ formulieren könnte, dass bei  $density_{E/N}(G) \gg 1$  die Orientierung *Ost* (topologisch) gewinnt.

### 3.2.1. Ein Netzwerk zufälliges Netzwerk mit inhomogener Orientierung

Wir greifen den eingangs betrachteten Fall eines `rnd_graph_rnd_val(n,m,p)` Graphen auf, d.h. eines Graphen mit  $n$  Knoten und  $m$  zufällig platzierten Kanten, diesmal aber mit Werten für  $p$ , die nahe bei 0.5 liegen, so dass beide Orientierungen in gleiche Größenordnung gelangen. Im intuitiven Sinne sind die beiden Orientierungen in einer Konkurrenz zueinander.

**Beispiel** Wir simulieren einen `rnd_graph_rnd_val(40,400, p)` Graphen für  $p = 0.7$ . Verglichen mit einem vollständigen Graphen, der bei 4 Knoten 780 Kanten besitzt, ist dieser Graph etwa halb mit Kanten gefüllt, genauer seine Dichte liegt bei 0.51. Der mittlere Orientierungswert liegt für dieses Beispiel initial bei nur  $\langle OW \rangle = 0.48$ , also etwas unter dem bei einem vollständigen Graphen zu erwartenden Wert von  $p \cdot p + (1 - p) \cdot (1 - p) = 0.58$  liegt. Offenbar gibt einen leichten Überschuss von Kanten zwischen unterschiedlichen Orientierungen.

Abbildung 6 zeigt den Verlauf einiger Kenngrößen über die Simulationszeit von 1000 Schritten. Wir erkennen, dass der mittlere Orientierungswert sich bis auf wenige Prozentpunkte kaum verändert.

Auch die Dichte verändert sich numerisch nur geringfügig. Sie ist aber offenbar Schwankungen unterworfen, d.h. es werden phasenweise sowohl Kanten erzeugt als auch gelöscht, allerdings ohne dass ein deutlicher Trend in die eine oder in die andere Weise erkennbar wäre.

Wie aber klar erkennbar ist, liegt die Kenngröße  $density_{E/N}(G)$  oberhalb von 1.0 und weist eine klare Aufwärtstendenz zugunsten von der *Ost*-Orientierung auf. Wir können dies als eine *Konkurrenzynamik* begreifen, bei denen der initial bevorteilte Teil der Akteure zu „gewinnen“ scheint.

Gehen wir mit dem Wert von  $p$  weiter in Richtung 0.5, dann wird die Dynamik immer zufälliger. Abbildung 7 zeigt das gleiche Szenario für  $p = 0.55$ . Wie man

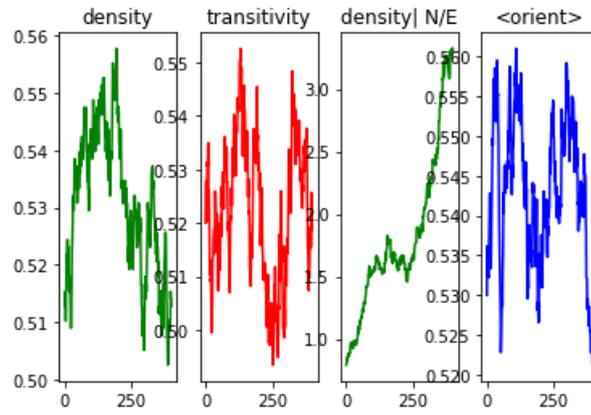


Abbildung 6: Kenngrößenverlauf eines zufälligen Graphen mit  $p = 0.7$

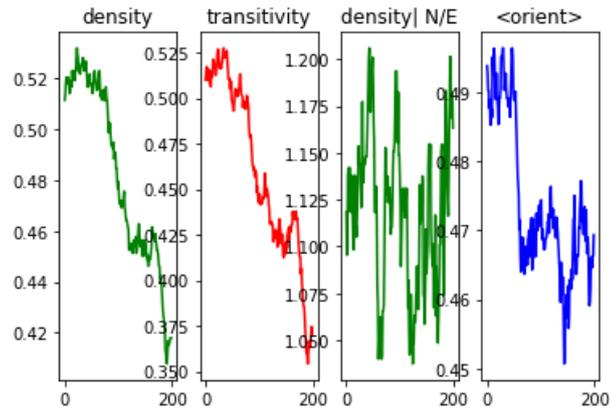


Abbildung 7: Kenngrößenverlauf eines zufälligen Graphen mit  $p = 0.55$

erkennt, liegen die Werte für  $density_{E/N}(G)$  viel dichter bei der 1 und unterliegen zudem keiner klaren Tendenz, d.h. es scheint eine *Konkurrenzdynamik* zu sein, bei denen sich die Konkurrenzsituation nicht klar zugunsten einer der beiden Orientierungsvarianten entscheidet.

### 3.2.2. Ein Netzwerk aus Akteuren entgegengesetzter Orientierung

Betrachten wir nun Auswirkungen, die zusätzlich eine ungleiche Verteilung der absoluten Vermögenswerte haben können.

Wir simulieren wieder die Dynamik eines zufälligen Graphen mit  $n$  Knoten und  $m$  Kanten. Diesmal liegt die Wahrscheinlichkeit  $p$  für einen Knoten mit Ost-Orientierung etwas unterhalb von 50%, also beispielsweise bei  $p = 0.4$ . Hierdurch verbindet also eine Kante mit annähernd gleicher Wahrscheinlichkeit gleich wie orthogonal orientiert Akteure, denn mit der Wahrscheinlichkeit  $p \cdot p + (1-p) \cdot (1-p) = 0.52$  sind die Akteure gleich und mit der Wahrscheinlichkeit  $2 \cdot p \cdot (1-p) = 0.48$  orthogonal orientiert. Hierdurch sind Hinzufügen und Löschen von Kanten ebenfalls zunächst gleichwahrscheinlich ist, wobei wir vermuten dürfen, dass sich der leichte Vorsprung von Nord auch durchsetzen wird.

Allerdings fügen wir eine weitere Asymmetrie hinzu, indem wir 99% aller Ost-Akteure um den Faktor 100 skalieren, so dass diese bei einem Vergleich mit einem Nord-Akteur praktisch stets als Profiteur  $X$  hervorgehen. Im weiteren wird der Ost-Akteur  $X$  einen Nachbarn  $Z$  des Nord-Akteurs  $Y$  löschen, da der Orientierungswert bei 0 liegt. Dieser Nachbar  $Z$  ist aber mit der Wahrscheinlichkeit  $1-p = 0.6$  wieder ein Nord-Akteur, so dass wir eine Trennung der beiden „Lager“ erwarten dürfen. Dies muss aber zu einer Steigerung der Orientierung führen, denn es bleiben nach einer Löschung relativ mehr Kanten mit gleicher Orientierung übrig.

**Beispiel** Wir simulieren wieder die Dynamik eines zufälligen Graphen mit  $n = 40$  Knoten und  $m = 200$  Kanten. Diesmal liegt die Wahrscheinlichkeit für einen Knoten mit Ost-Orientierung bei  $p = 0.4$ .

Abbildung 8 zeigt den Verlauf einiger Kenngrößen. Wir erkennen, dass sich eine klare Tendenz in Bezug auf die Dichteveränderung ergibt; die Kenngröße  $density_{E/N}(G)$  fällt deutlich unter 1.0 und weist eine klare Tendenz zugunsten von der Nord-Orientierung auf. Gleichzeitig steigt zudem noch der mittlere Orientierungswert deutlich an.

Betrachten wir die noch kleinere Wahrscheinlichkeit für einen Knoten mit Ost-Orientierung  $p = 0.3$ , so führt jede Interaktion unterschiedlicher Akteure mit noch größerer Wahrscheinlichkeit zu einer Löschung einer  $X \rightarrow Z$  Kante zwischen unterschiedlichen Akteuren.

Abbildung 9 zeigt den Verlauf einiger Kenngrößen. Dieser sieht dem Verlauf für  $p = 0.4$  in der Tendenz sehr ähnlich, wenn auch der Verlauf deutlich klarer, da schwankungsärmer, zu erkennen ist.

Wir interpretieren diese Entwicklung: klare Orientierung der relativen Dichte  $density_{E/N}(G)$  bei gleichzeitigem Anstieg des mittleren Orientierungswerts als Ausdrucksform einer *Herrschaftsdynamik*, bei der eine Seite sich strukturell ausbreitet und der Orientierungswert steigt.

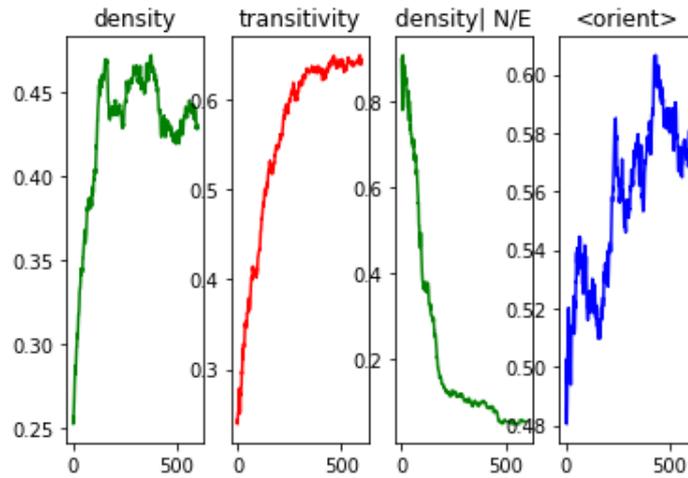


Abbildung 8: Kenngrößenverlauf eines zufälligen Graphen mit zahlenmäßig unterlegenen aber vermögensdominanten Ost-Akteuren für  $p = 0.4$

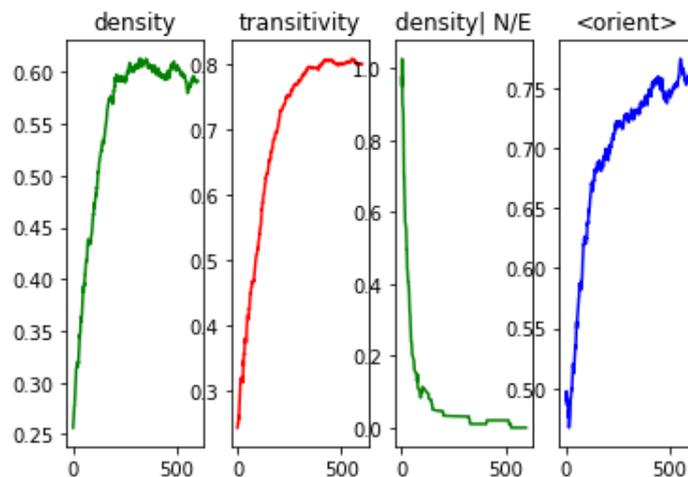


Abbildung 9: Kenngrößenverlauf eines zufälligen Graphen mit zahlenmäßig unterlegenen aber vermögensdominanten Ost-Akteuren für  $p = 0.3$

## 4. Zusammenfassung

In diesem Beitrag haben wir ein Modell vorgestellt, das die global beschriebenen Strukturdynamiken auf Basis lokaler Interaktionen beschreibt. Es basiert auf einem Graphenmodell, bei dem ähnlich orientierte Akteure dazu neigen, neue Interaktionsbeziehungen aufzubauen, während unterschiedlich orientierte Akteure eher dies abbauen (modelliert durch das Einfügen bzw. Löschen von Kanten).

Es war nicht unser Ziel zu zeigen, dass unser Modell – in welcher Form auch immer – ein „richtiges“ Modell wäre. Es geht vielmehr darum, eine globale Sicht (die Dynamiken als solche) mit der lokalen Sicht (die Interaktion mit ihrem lokalen Effekt auf das Netzwerk explanatorisch *in Verbindung* zu setzen. Dies ist uns gelungen, denn für Grenzfälle lässt sich zeigen, dass das theoretisch abgeleitete Verhalten (Solidarisierungs-, Autorisierungs-, Konkurrenz- und Herrschaftsdynamiken) im Modell nachzeichnen ließen.

Das Modell erlaubt jetzt eine tiefere Analyse wie verschiedene Parameter – insbesondere die Verteilung der Orientierung und die Topologie des Netzwerkes – im Wechselspiel sich auf die Dynamik auswirken.

Natürlich wäre es reizvoll, realweltliche Situationen im Rahmen dieses Modells zu beschreiben und die beobachtete Dynamik mit der simulativ prognostizierten abzugleichen.

## Literatur

- [Easley und Kleinberg 2010] EASLEY, David ; KLEINBERG, Jon: *Networks, Crowds, and Markets: Reasoning about a Highly Connected World*. Cambridge University Press, 2010
- [Gilbert und Troitzsch 1999] GILBERT, Nigel ; TROITZSCH, Klaus G.: *Simulation for the social scientist*. Open University Press, 1999
- [Langer 2005] LANGER, Roman: *Anerkennung und Vermögen: Eine sozialtheoretische Analyse der Selbstorganisation in und von Bildungsinstitutionen*. Münster : Monsenstein & Vannerdat, 2005
- [Langer und Köhler-Bußmeier 2009] LANGER, Roman ; KÖHLER-BUSSMEIER, Michael: Der Konstitutionsmechanismus sozialer Systeme. In: LÜDE, Rolf v. (Hrsg.) ; MOLDT, Daniel (Hrsg.) ; VALK, Rüdiger (Hrsg.): *Selbstorganisation und Governance in künstlichen und sozialen Systemen* Bd. 5. Münster : Lit Verlag, 2009, Kap. 6. – URL <http://www.lit-verlag.de/isbn/3-8258-10057-3>

## A. Ein vollständiges Netzwerk mit unterschiedlich verteilten Vermögensorientierungen

Wir betrachten nun Graphen, die bereits alle Kanten besitzen. Bei  $n$  Knoten hat ein vollständiger Graph  $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n - 1)$  Kanten. Da der Graph bereits alle Kanten besitzt, kann seine Dichte höchstens abnehmen. Dies wird umso schneller geschehen, je größer die Wahrscheinlichkeit ist, dass unterschiedlich orientierte Akteure aufeinander treffen.

Dieser Prozess stellt eine Form der *Konkurrenzsdynamik* dar, bei dem das Netzwerk Verbindungen abbaut.

Um diese Prognose zu verifizieren, simulieren wir vollständige Graphen initialisieren die Knoten aber (wie zuvor auch) mit der Wahrscheinlichkeit  $p$  mit dem Vermögen  $A = (1, 0)^\top$  (Ost) und mit der Wahrscheinlichkeit  $1 - p$  mit dem Vermögen  $A = (0, 1)^\top$  (Nord).

**Beispiel** Wir betrachten einen Graphen, der bereits alle Kanten besitzt. Bei  $n = 40$  Knoten hat ein vollständiger Graph also 780 Kanten. Abbildung 10 zeigt dem Verlauf der Kenngrößen für die Wahrscheinlichkeiten  $p = 0.5$ ,  $p = 0.75$  und  $p = 0.9$ .

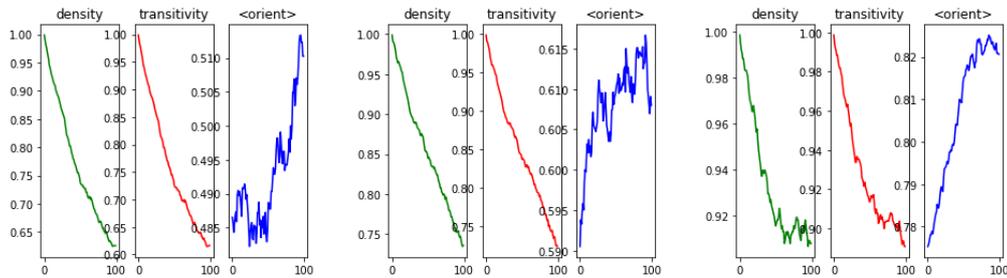


Abbildung 10: Ein vollständiges Netzwerk für  $p = 0.5$ ,  $p = 0.75$  und  $p = 0.9$ .

Der qualitative Verlauf der Kenngrößen ist auch für verschiedene Werte für  $p$  ähnlich: Die Dichte nimmt umso schneller ab, je größer die Wahrscheinlichkeit ist, dass unterschiedlich orientierte Akteure aufeinander treffen, denn in diesem Fall kommt es zu Kantenlöschung. Also ist bei einem Wert nahe bei  $p = 0.5$  eine schnellere Auflösung zu beobachten als bei  $p = 1.0$ .

Konkretes Zahlenbeispiel: Bei  $p = 0.9$  sind  $p \cdot p + (1 - p) \cdot (1 - p) = 0.82 = 82\%$  aller Kanten zwischen gleich orientierten Akteuren. Bei  $p = 0.75$  sind es  $62,5\%$  aller Kanten und bei  $p = 0.5$  sind es  $50\%$  aller Kante.

Werte kleiner als  $p = 0.5$  müssen wir nicht betrachten, denn aus Symmetriegründen verhalten sich diese genau wie bei  $1 - p$ .

Bemerkenswerterweise steigt der mittlere Orientierungswert im Zuge der Auflösung sogar an. Dies ist insofern verständlich, als dass bevorzugt gegensätzliche Kanten entfernt werden, wodurch der Mittelwert steigt.